Álgebra

Pedro Sancho de Salas

20-11-2006

Índice general

Capítulo 1

Espacio de soluciones de un sistema de ecuaciones algebraicas. Espectro primo de un anillo

1.1. Introducción

Simplificando y hablando de un modo algo pedante podríamos decir que el Álgebra es la ciencia que estudia los polinomios y sus raíces. En términos matemáticos algo más amplios, el Álgebra estudia los sistemas de ecuaciones algebraicas

$$\begin{array}{l} p_1(x_1,\ldots,x_n)=0 \\ \ \cdots \\ p_r(x_1,\ldots,x_n)=0 \end{array} \qquad (*)$$

y sus soluciones.

Quisiera hacer aquí un comentario marginal: En nuestra definición de Álgebra aparecen conceptos como "espacio de soluciones" (de un sistema de ecuaciones algebraicas) "funciones algebraicas" (los polinomios), conceptos que están estrechamente relacionados con otros como espacio topológico, variedad diferenciable, funciones continuas, funciones diferenciables, etc., que aparecen en Topología, Análisis, Geometría Diferencial, etc.

Profundicemos en lo que entendemos generalmente por sistemas de ecuaciones algebraicas. Tendemos a identificar los sistemas de ecuaciones con el conjunto de sus soluciones. Así, por ejemplo, si al sistema de ecuaciones anterior le añadimos la ecuación $p_1(x_1,\ldots,x_n)=0$ decimos que tenemos el mismo sistema, o si le añadimos una ecuación que sea combinación lineal (con coeficientes polinomios) de $p_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,p_r(x_1,\ldots,x_n)$ decimos que tenemos el mismo sistema de ecuaciones algebraicas, porque las soluciones de ambos sistemas son las mismas. En conclusión, cuando consideramos el sistema de ecuaciones $(*)$ estamos considerando el ideal $(p_1,\ldots,p_r)\subset k[x_1,\ldots,x_n]$. Digamos por definición, que dar un sistema de ecuaciones algebraicas es dar un ideal del anillo de polinomios.

¿Las soluciones de un sistema de ecuaciones algebraicas determinan el sistema, es decir, el ideal? Las soluciones reales del sistema

$$x^2+y^2+1=0$$

son el vacío, del cual, obviamente, no podríamos deducir que estábamos planteando la ecuación $x^2 + y^2 + 1 = 0$. Ahora bien, si consideramos el conjunto de todas las soluciones complejas de este sistema, se cumple que el ideal de todos los polinomios de $\mathbb{C}[x, y]$ que se anulan en este conjunto coincide con el ideal $(x^2 + y^2 + 1)$. El teorema de los ceros de Hilbert dice que las soluciones de un sistema "casi" determinan el sistema. Expliquemos el porqué del "casi" de la sentencia anterior. Veamos con que pequeño problema nos encontramos. Los dos sistemas de ecuaciones distintos $x = 0$ y $x^2 = 0$ ($(x^2) \underset{\neq}{\subset} (x)$) tienen las mismas soluciones. En general, dado un ideal $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ y $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ tal que $f^m \in I$, las soluciones del sistema de ecuaciones algebraicas definida por I son las mismas que el definido por (I, f). El teorema de los ceros de Hilbert dice que (el ideal de) las funciones que se anulan sobre el conjunto de las soluciones de un sistema de ecuaciones algebraicas $I \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, coincide con $r(I) = \{f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ tales que $f^m \in I$, para algún $m > 0\}$.

En el estudio de los sistemas de ecuaciones algebraicas hemos ampliado nuestro cuerpo de partida $\mathbb{R}$ a uno algebraicamente cerrado, $\mathbb{C}$. Si ampliamos aún más nuestro "marco" es decir, consideramos en vez de $\mathbb{C}$ cualquier anillo, se cumple que "las soluciones (sobre cualquier anillo) de un sistema de ecuaciones algebraicas I determinan el ideal I". Así por ejemplo, $x = 0$ no tiene las mismas soluciones que $x^2 = 0$: sea $A = \mathbb{C}[z]/z^2$, entonces $\bar{z}$ es una solución de $x^2 = 0$ y no es una solución de $x = 0$.

Sea $I \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ un sistema de ecuaciones algebraicas. Consideremos (para cada anillo) el conjunto de soluciones de este sistema de ecuaciones algebraicas. Consideremos una función de este conjunto, es decir, una aplicación (para cada anillo A)

$$\{\text{Conjunto de soluciones sobre } A \text{ del sistema } I\} \xrightarrow{\phi_A} A$$

Probaremos que existe un único $\overline{p(x_1, \dots, x_n)} \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I$ de modo que $\phi_A((a_1, \dots, a_n)) = p(a_1, \dots, a_n)$. Es decir, "el anillo de todas las funciones del conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones algebraicas definido por I es $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I$".

Dados dos sistemas de ecuaciones algebraicas $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$, $J \subseteq k[y_1, \dots, y_m]$ y una aplicación (para cada anillo A)

$$\{\text{soluciones con valores en } A \text{ del sistema } I\} \xrightarrow{\phi_A} \{\text{soluciones con valores en } A \text{ del sistema } J\}$$

probaremos que existe un único morfismo de k-álgebras $f \colon k[y_1, \dots, y_m]/J \to k[x_1, \dots, x_m]/I$ (de ecuaciones $\bar{y}_i = \overline{r_i(x_1, \dots, x_n)}$, es decir, $f(\bar{y}_i) = \overline{r_i(x_1, \dots, x_n)}$) de modo que

$$\phi_A \equiv \begin{array}{l} y_1 = r_1(x_1, \dots, x_n) \\ \cdots \\ y_m = r_m(x_1, \dots, x_n) \end{array}$$

La teoría (Geometría) que estudia los conjuntos de soluciones (sobre todo anillo) de un sistema de ecuaciones algebraicas y sus aplicaciones coincide con la teoría (Álgebra) que estudia las k-álgebras y sus morfismos de k-álgebras.

Consideremos un sistema de ecuaciones k-algebraicas,

$$\begin{array}{l} p_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ p_r(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{array} \qquad (*)$$

Consideremos, para cada anillo A, el conjunto de todas las soluciones con valores en A del sistema de ecuaciones,

$$A \overset{F}{\rightsquigarrow} \{\text{el conjunto de todas las soluciones con valores en } A \text{ del sistema de ecuaciones } (*)\}$$

Sin aún saberlo, estamos hablando de la categoría ("conjunto") de los anillos y de los funtores F ("aplicaciones") de la categoría anillos en la categoría de conjuntos. Más adelante definiremos estos conceptos. Veremos que F es un funtor representable y calcularemos los morfismos entre funtores representables, obteniendo los resultados anteriores.

En la literatura matemática es más frecuente hablar del espectro primo del anillo $k[x_1,\dots,x_n]/I$ que considerar el funtor que asocia a cada anillo A las soluciones del sistema de ecuaciones algebraicas definido por I. El espectro primo de un anillo es el conjunto de los ideales primos del anillo.

Si $k \hookrightarrow K$ es una extensión de cuerpos, $(a_1,\dots,a_n)$ es una solución sobre K del sistema I y $\tau\colon K \simeq K$ es un isomorfismo de cuerpos sobre k, es fácil probar que $(\tau(a_1),\dots,\tau(a_n))$ es también una solución de I. A cada solución $(a_1,\dots,a_n)$, sobre K, del sistema I le podemos asignar el ideal primo $\mathfrak{p} := \{\overline{p(x_1,\dots,x_n)} \in k[x_1,\dots,x_n]/I$ tales que $p(a_1,\dots,a_n) = 0\}$ y es fácil comprobar que a $(a_1,\dots,a_n)$ y $(\tau(a_1),\dots,\tau(a_n))$ les asignamos el mismo ideal primo. Se puede probar que si K es un cuerpo algebraicamente cerrado "suficientemente grande" (por ejemplo si $k = \mathbb{Q}$ podemos tomar $K = \mathbb{C}$), el conjunto de soluciones sobre K del sistema I, módulo automorfismos de K, es igual al espectro primo de $k[x_1,\dots,x_n]/I$.

1.2. Categorías

Dar una categoría $\mathcal{C}$ es dar

1. Una familia arbitraria, cuyos elementos llamaremos objetos de $\mathcal{C}$.
2. Unos conjuntos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,N)$, para cada par de objetos M,N de $\mathcal{C}$, cuyos elementos f llamaremos morfismos de M en N y denotaremos por el símbolo $f\colon M \to N$.
3. Una aplicación

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N,P) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,P), \quad (f,g) \mapsto f \circ g$$

para cada terna M,N,P de objetos de $\mathcal{C}$. Satisfaciéndose

a) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

b) Para cada objeto M de $\mathcal{C}$, existe un morfismo $\mathrm{Id}_M\colon M \to M$ de modo que $f \circ \mathrm{Id}_M = f$ e $\mathrm{Id}_M \circ g = g$ para todo morfismo $f\colon M \to N$ y $g\colon N \to M$.

Un morfismo $f\colon M \to N$ se dice que es un isomorfismo si existe $g\colon N \to M$ de modo que $f \circ g = \mathrm{Id}_N$ y $g \circ f = \mathrm{Id}_M$.

La categoría $\mathcal{C}_{Conj}$ de conjuntos, es la categoría cuyos objetos son los conjuntos y los morfismos entre los objetos son las aplicaciones de conjuntos.

La categoría de espacios topológicos es la categoría cuyos objetos son los espacios topológicos y los morfismos entre los objetos son los homeomorfismos.

La categoría de las variedades diferenciales es la categoría cuyos objetos son las variedades diferenciales y los morfismos los morfismos de variedades diferenciales.

La categoría de grupos es la categoría cuyos objetos son los grupos y los morfismos los morfismos de grupos.

La categoría de los k-espacios vectoriales es la categoría cuyos objetos son los k-espacios vectoriales y los morfismos las aplicaciones k-lineales.

La categoría $\mathcal{C}_{Mod}$ de A-módulos, es la categoría cuyos objetos son los A-módulos y los morfismos entre los objetos son los morfismos de módulos.

La categoría de los anillos es la categoría cuyos objetos son los anillos y los morfismos son los morfismos de anillos.

Categoría de las k-álgebras: Sea k un cuerpo y consideremos un morfismo de anillos $k \hookrightarrow A$. Se dice que A con este morfismo de anillos es una k-álgebra. Seguiremos la siguiente notación en el morfismo $k \hookrightarrow A$, $\lambda \overset{Not.}{\mapsto} \lambda$.

El anillo de polinomios $k[x]$ es una k-álgebra: $k \to k[x]$, $\lambda \mapsto \lambda$.

Dados dos k-álgebras A y B un morfismo de k-álgebras de A en B, es un morfismo de anillos $f\colon A \to B$, de modo que $f(\lambda) = \lambda$, para todo $\lambda \in k$.

La categoría de k-álgebras es la categoría cuyos objetos son las k-álgebras y los morfismos los morfismos de k-álgebras.

1.3. Funtores representables

1. Definición : Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ dos categorías. Dar un funtor covariante $F\colon \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}'$ es asignar a cada objeto M de $\mathcal{C}$ un objeto $F(M)$ de $\mathcal{C}'$, y cada morfismo $f\colon M \to N$ de $\mathcal{C}$ un morfismo $F(f)\colon F(M) \to F(N)$ de $\mathcal{C}'$, de modo que se verifique que $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ y $F(\mathrm{Id}_M) = \mathrm{Id}_{F(M)}$.

Análogamente se definen los funtores contravariantes $F\colon \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}'$, que asignan a cada objeto M de $\mathcal{C}$ un objeto $F(M)$ de $\mathcal{C}'$, y a cada morfismo $f\colon M \to N$ de $\mathcal{C}$ un morfismo $F(f)\colon F(N) \to F(M)$ de $\mathcal{C}'$, de modo que verifica $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$ y $F(\mathrm{Id}_M) = \mathrm{Id}_{F(M)}$.

2. Ejemplo : Sea $\mathcal{C}_{Esp.vect.}$ la categoría de k-espacios vectoriales. Podemos definir el siguiente funtor contravariante

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{Esp.vect.} &\rightsquigarrow \mathcal{C}_{Esp.vect} \\ E &\rightsquigarrow E^* \\ f &\rightsquigarrow f^* \end{aligned}$$

Sea $\mathcal{C}$ una categoría y N un objeto de $\mathcal{C}$. Un morfismo $f\colon M \to M'$ induce la aplicación $f_*\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M')$, $g \mapsto f_*(g) := f \circ g$. Sea $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, -)\colon \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}_{Conj}$ el funtor covariante de $\mathcal{C}$ en la categoría de los conjuntos definido por:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, -)\colon \mathcal{C} &\rightsquigarrow \mathcal{C}_{Conj} \\ M &\rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M) \\ f &\rightsquigarrow f_* \\ (f \circ g) &\rightsquigarrow (f \circ g)_* = f_* \circ g_* \end{aligned}$$

Un morfismo $f\colon M \to M'$ induce la aplicación $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M', N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$, $g \mapsto f^*(g) := g \circ f$. Sea $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, N)\colon \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}_{Conj}$ el funtor contravariante definido por:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, N)\colon \mathcal{C} &\rightsquigarrow \mathcal{C}_{Conj} \\ M &\rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N) \\ f &\rightsquigarrow f^* \\ (f \circ g) &\rightsquigarrow (f \circ g)^* = g^* \circ f^* \end{aligned}$$

3. Ejemplo : Consideremos un sistema de ecuaciones k-algebraicas

$$\begin{array}{l} p_1(x_1,\dots,x_n)=0 \\ \dots \\ p_r(x_1,\dots,x_n)=0 \end{array}$$

Sea $\mathcal{C}_{k-alg}$ la categoría de k-álgebras y $\mathcal{C}_{Conj}$ la categoría de conjuntos. Definamos el funtor "espacio de soluciones del sistema de ecuaciones algebraica $p_1=\dots=p_r=0$":

$$\begin{array}{rccl} Esp(p_1=\dots=p_r=0)\colon & \mathcal{C}_{k-alg} & \rightsquigarrow & \mathcal{C}_{Conj} \\ & A & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} \text{Conjunto de soluciones con valores} \\ \text{en el anillo } A \text{ del sistema} \\ p_1=\dots=p_r=0 \end{array} \right\} \end{array}$$

Al morfismo de k-álgebras $f\colon A\to B$, $Esp(p_1=\dots=p_r=0)$ le asigna la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \left\{ \begin{array}{l} \text{Conjunto de soluciones con valores} \\ \text{en el anillo } A \text{ del sistema} \\ p_1=\dots=p_r=0 \end{array} \right\} & \to & \left\{ \begin{array}{l} \text{Conjunto de soluciones con valores} \\ \text{en el anillo } B \text{ del sistema} \\ p_1=\dots=p_r=0 \end{array} \right\} \\ (a_1,\dots,a_n) & \mapsto & (f(a_1),\dots,f(a_n)) \end{array}$$

Se cumple que $Esp(p_1=\dots=p_r=0)=\operatorname{Hom}_{k-alg}(k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r),-)$:

Recordemos que dado un anillo A y un ideal $I\subset A$ se define el cociente de A por el ideal I, que denotamos por A/I, como sigue

$$A/I=\{\bar a,\ \text{con } a\in A,\ \text{de modo que } \bar a=\bar a' \text{ si y sólo si } a-a'\in I\}$$

A/I tiene estructura de anillo: $\bar a+\bar a' := \overline{a+a'}$, $\bar a\cdot\bar a' := \overline{a\cdot a'}$. El epimorfismo $\pi\colon A\to A/I$, $\pi(a)=\bar a$ es un morfismo de anillos y se cumple la siguiente propiedad universal: Un morfismo de anillos $f\colon A\to B$ factoriza vía π (es decir, existe un morfismo $\bar f\colon A/I\to B$, tal que $f=\bar f\circ\pi$) si y sólo si $I\subseteq \operatorname{Ker} f$ (es decir, $f(I)=0$). En este caso, $\bar f$ es único y está definido por $\bar f(\bar a)=f(a)$. Es decir,

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Hom}_{Anillos}(A/I,B) & = & \{f\in \operatorname{Hom}_{Anillos}(A,B)\colon f(I)=0\} \\ h & \longmapsto & h\circ\pi \\ \bar f & \longleftarrow & f \end{array}$$

Observemos que $\operatorname{Hom}_{k-alg}(k[x_1,\dots,x_n],A)=A^n$, $f\mapsto (f(x_1),\dots,f(x_n))$. Por tanto,

$$\begin{aligned} &\operatorname{Hom}_{k-alg}(k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r),A) \\ &\qquad =\{f\in \operatorname{Hom}_{k-alg}(k[x_1,\dots,x_n],A)\colon 0=f(p_i)=p_i(f(x_1),\dots,f(x_n)) \text{ para todo } i\} \\ &\qquad =\{(a_1,\dots,a_n)\in A^n\colon 0=p_i(a_1,\dots,a_n) \text{ para todo } i\} \\ &\qquad = Esp(p_1=\dots=p_r=0)(A) \end{aligned}$$

4. Definición: Sean $F,F'\colon \mathcal{C}\rightsquigarrow\mathcal{C}'$ dos funtores covariantes (o contravariantes). Dar un morfismo $\theta\colon F\to F'$, es dar para cada objeto M de $\mathcal{C}$ un morfismo $\theta_M\colon F(M)\to F'(M)$, de modo que para cada morfismo $f\colon M\to N$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(M) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\theta_M"] & F(N) \arrow[d, "\theta_N"] \\ F'(M) \arrow[r, "F'(f)"] & F'(N) \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Diremos que θ es un isomorfismo si los θ_M son isomorfismos, para todo objeto M de $\mathcal{C}$.

5. Definición : Se dicen que dos categorías $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ son equivalentes (resp. antiequivalentes) si existen dos funtores covariantes (resp. contravariantes) $F\colon \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}'$, $G\colon \mathcal{C}' \rightsquigarrow \mathcal{C}$ de modo que $F \circ G$ y $G \circ F$ son funtores isomorfos al funtor identidad.

6. Definición : Dada una categoría $\mathcal{C}$ definimos la categoría opuesta, $\mathcal{C}^0$, como la categoría cuyos objetos son los de $\mathcal{C}$ y

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^0}(X, Y) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$$

Sigamos la convención de que dado un morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ cuando lo pensemos en $\mathcal{C}^0$ lo escribiremos f^0.

Por definición, entenderemos que $f^0 \circ g^0 = (g \circ f)^0$.

7. Ejemplo : El funtor

$$\begin{aligned} &\mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}^0 \\ &M \mapsto M \\ &f \mapsto f^0 \end{aligned}$$

es un funtor contravariante. La categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}^0$ son antiequivalentes, por tanto todo concepto dado en $\mathcal{C}$ da el correspondiente concepto "dual" en $\mathcal{C}^0$.

$\mathrm{Hom}(F, F')$ denotará los morfismos de F en F'. Dado un objeto M, denotemos $M^{\cdot} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, -)$.

8. Teorema : *Sea $F\colon \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}_{Conj}$ un funtor covariante. Se verifica*

1. $\mathrm{Hom}(M^{\cdot}, F) = F(M)$.
2. $\mathrm{Hom}(M^{\cdot}, M'^{\cdot}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M', M)$, $f^* \longleftarrow\!\!\dashv f$.
3. $M^{\cdot} \simeq M'^{\cdot}$ *si y sólo si* $M \simeq M'$.

Demostración. 1. Todo morfismo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, -) \xrightarrow{\theta} F$ queda determinado por $\theta_M(\mathrm{Id}_M) = g \in F(M)$: No es más que considerar, dado $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,M) \arrow[r, "\theta_M"] \arrow[d, "f_*"] & F(M) \arrow[d, "F(f)"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,N) \arrow[r, "\theta_N"] & F(N) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Id}_M \arrow[r, mapsto, "\theta_M"] \arrow[d, mapsto, "f_*"] & g \arrow[d, mapsto, "F(f)"] \\ f \arrow[r, mapsto, dashed, "\theta_N"] & F(f)(g) \end{tikzcd}$$

2. Es consecuencia inmediata de 1.
3. es consecuencia inmediata de 2.

□

La proposición dual de la anterior es la siguiente.

9. Teorema: *Sea $F\colon \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}_{Conj}$ un funtor contravariante y denotemos $M^{\cdot} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, M)$. Se verifica*

1. $\mathrm{Hom}(M^{\cdot}, F) = F(M)$.
2. $\mathrm{Hom}(M^{\cdot}, M'^{\cdot}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, M')$, $f_* \longleftarrow\!\!\dashv f$.
3. $M^{\cdot} \simeq M'^{\cdot}$ *si y sólo si* $M \simeq M'$.

10. Definición : Si $F \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, M)$ entonces se dice que F es un funtor (contravariante) representable y que M es el representante de F (el cual es único salvo isomorfismos, por 1.3.9 3.).

11. Ejemplo : En Matemáticas, cuando queremos expresar cuál es la propiedad universal de un objeto M (construido de cierto modo), lo que pretendemos es determinar $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, -)$ (ó $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, M)$). Pongamos un ejemplo:

"Propiedad universal de la topología final de una aplicación´´. Sea X un espacio topológico, Y un conjunto e $f\colon X \to Y$ una aplicación de conjuntos. Existe una topología en Y de modo que

$$\mathrm{Hom}_{cont}(Y, Z) = \{g \in \mathrm{Aplic}(Y, Z)\colon g \circ f \in \mathrm{Hom}_{cont}(Y, Z)\} \qquad (*)$$

para todo espacio topológico Z. En efecto, como puede comprobarse, es la topología de Y, cuyos abiertos son los subconjuntos $U \subset Y$ tales que $f^{-1}(U)$ es un abierto de X. Existe una única topología en Y cumpliendo $(*)$. En efecto, denotemos por Y' al conjunto Y dotado con otra topología cumpliendo $(*)$. Entonces, $\mathrm{Hom}_{cont}(Y, -) = \mathrm{Hom}_{cont}(Y', -)$, $g \mapsto g$ y el morfismo identidad $Y = Y'$ es un homeomorfismo por 1.3.9 3. La topología así definida en Y se denomina la topología final en Y de f.

Y con la topología final cumple $(*)$ y se dice que $(*)$ es la propiedad universal de la topología final en Y de la aplicación f.

12. Ejemplo : La recta real es $\mathbb{R}$, la recta compleja es $\mathbb{C}$. Definamos el funtor sobre la categoría de k-álgebras $Recta^{\cdot}$, como el funtor $Recta^{\cdot}(A) := A$. Observemos que $Recta^{\cdot} = \mathrm{Hom}_{k-alg}(k[x], -)$.

Sea

$$\begin{array}{l} p_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ p_r(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{array}$$

un sistema de ecuaciones algebraicas. Consideremos el funtor "espacio de soluciones de $p_1 = \cdots = p_r = 0$", $Esp(p_1 = \cdots = p_r = 0)$, definido por

$$Esp(p_1 = \cdots = p_r = 0)(A) = \{\text{Soluciones con valores en } A \text{ de } p_1 = \cdots = p_r = 0\}$$

Recordemos que $Esp(p_1 = \cdots = p_r = 0) = \mathrm{Hom}_{k-alg}(k[x_1, \dots, x_n]/(p_1, \dots, p_r), -)$. Se cumple que

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(Esp(p_1 = \cdots = p_r = 0), Recta^{\cdot}) &= \mathrm{Hom}_{k-alg}(k[x], k[x_1, \dots, x_n]/(p_1, \dots, p_r)) \\ &= k[x_1, \dots, x_n]/(p_1, \dots, p_r) \end{aligned}$$

"$k[x_1, \dots, x_n]/(p_1, \dots, p_r)$ es el anillo de todas las funciones universales del conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones algebraicas $p_1 = \cdots = p_r = 0$"

Explícitamente, dado $\overline{p(x_1, \dots x_n)} \in k[x_1, \dots, x_n]/(p_1, \dots, p_r)$ define el morfismo

$$\begin{array}{rcl} Esp(p_1 = \cdots = p_r = 0) & \to & Recta^{\cdot} \\ Esp(p_1 = \cdots = p_r = 0)(A) & \to & Recta^{\cdot}(A) = A \\ (a_1, \dots, a_n) & \mapsto & p(a_1, \dots, a_n) \end{array}$$

13. Ejemplo : Sean dos sistemas de ecuaciones algebraicas

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ p_r(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} q_1(y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \dots \\ q_s(y_1, \dots, y_m) = 0 \end{array} \right.$$

Se cumple que

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}(Esp(p_1 = \cdots = p_r = 0), Esp(q_1 = \cdots = q_s = 0)) \\ &\qquad = \mathrm{Hom}_{k-alg}(k[y_1, \dots, y_m]/(q_1, \dots, q_s), k[x_1, \dots, x_n]/(p_1, \dots, p_r)) \end{aligned}$$

Explícitamente, el morfismo de k-algebras $f\colon k[y_1,\dots,y_m]/(q_1,\dots,q_s)\to k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r)$ de ecuaciones $\bar y_i = r_(x_1,\dots,x_n)$ (es decir,$f(\bar y_i) = r_(x_1,\dots,x_n)$), define el morfismo

$$\begin{array}{rcl} Esp(p_1=\cdots=p_r=0) & \overset{f^*}{\to} & Esp(q_1=\cdots=q_s=0) \\ Esp(p_1=\cdots=p_r=0)(A) & \to & Esp(q_1=\cdots=q_s=0)(A) \\ (a_1,\dots,a_n) & \mapsto & (b_1=r_1(a_1,\dots,a_n),\dots,b_m=r_m(a_1,\dots,a_n)) \end{array}$$

14. Teorema: *"Dos sistemas de ecuaciones algebraicas (con las mismas variables) tienen el mismo conjunto de soluciones (para todo anillo) si y sólo si los ideales generados por los polinomios de las ecuaciones de cada sistema coinciden" Con mayor precisión, sean*

$$\left\{\begin{array}{l} p_1(x_1,\dots,x_n)=0 \\ \cdots \\ p_r(x_1,\dots,x_n)=0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} q_1(x_1,\dots,x_n)=0 \\ \cdots \\ q_s(x_1,\dots,x_n)=0 \end{array}\right.$$

dos sistemas de ecuaciones algebraicas. Se cumple que

$$Esp(p_1=\cdots=p_r=0)=Esp(q_1=\cdots=q_s=0) \iff (p_1,\cdots,p_r)=(q_1,\dots,q_s)$$

Demostración. Decir que $Esp(p_1=\cdots=p_r=0)=Esp(q_1=\cdots=q_s=0)$ quiere decir que el morfismo

$$\begin{array}{rcl} Esp(p_1=\cdots=p_r=0) & \to & Esp(q_1=\cdots=q_s=0) \\ Esp(p_1=\cdots=p_r=0)(A) & \to & Esp(q_1=\cdots=q_s=0)(A) \\ (a_1,\dots,a_n) & \mapsto & (a_1,\dots,a_n) \end{array}$$

está bien definido y es un isomorfismo. Es decir, el morfismo

$$k[x_1,\dots,x_n]/(q_1,\dots,q_s)\to k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r),\ \bar x_i\mapsto \bar x_i,$$

está bien definido y es un isomorfismo. Ahora bien, este morfismo está bien definido si aplica los $\bar q_i$ al cero, es decir $(q_1,\dots,q_s)\subseteq(p_1,\dots,p_r)$. El morfismo inverso para que exista ha de estar definido por $k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r)\to k[x_1,\dots,x_n]/(q_1,\dots,q_s)$, $\bar x_i\mapsto\bar x_i$. De nuevo este morfismo está bien definido si y sólo si $(p_1,\dots,p_r)\subseteq(q_1,\dots,q_s)$.

En conclusión,

$$Esp(p_1=\cdots=p_r=0)=Esp(q_1=\cdots=q_s=0) \iff (p_1,\cdots,p_r)=(q_1,\dots,q_s)$$

□

1.4. Espacio de un anillo de funciones

Hemos probado que el anillo de funciones universales de $Esp(p_1=\cdots=p_r=0)$ es la k-álgebra $k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r)$ y que $Esp(p_1=\cdots=p_r=0)=\mathrm{Hom}_{k-alg}(k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r),-)$. También denotaremos a $Esp(p_1=\cdots=p_r=0)$ por $Esp\,k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r)$ (y lo leeremos, espacio de anillo de funciones $k[x_1,\dots,x_n]/(p_1,\dots,p_r)$). En general:

1. Definición: Sea A una k-álgebra. Definiremos

$$Esp\,A=\mathrm{Hom}_{k-alg}(A,-)$$

y diremos que $Esp\,A$ es el espacio de anillo de funciones A.

Todo morfismo de k-álgebras $f\colon A \to B$, define el morfismo $f^*\colon Esp\,B \to Esp\,A$, $f^*(g) = g \circ f$.

2. Proposición : $\operatorname{Hom}(Esp\,A, Recta^{\cdot}) = A$.

Demostración. $\operatorname{Hom}(Esp\,A, Recta^{\cdot}) = \operatorname{Hom}_{k-alg}(k[x], A) = A$. Explícitamente, $a \in A$, define el morfismo

$$\begin{array}{rcl} Esp\,A & \to & Recta^{\cdot} \\ Hom_{k-alg}(A,B) = Esp\,A(B) & \to & B = Recta^{\cdot}(B) \\ f & \mapsto & f(a) \end{array}$$

□

3. Notación : Diremos que $x \in Esp\,A(B) = \operatorname{Hom}_{k-alg}(A,B)$ es un punto de $Esp\,A$ (con valores en B). Dado $a \in A$ y $x \in Esp\,A(B)$, denotaremos $a(x) = x(a)$.

4. Proposición : *Una función $a \in A$ es nula si y sólo si $a(x) = 0$ para todo punto de $Esp\,A$.*

Sea $I \subset A$ un ideal. Recordemos la propiedad universal del cociente:

$$\operatorname{Hom}_{Anillos}(A/I, B) = \{f \in \operatorname{Hom}_{Anillos}(A,B),\ \text{tales que } f(I) = 0\}$$

5. Proposición : *"$Esp\,A/I$ se identifica con los puntos de $Esp\,A$ donde se anulan todas las funciones del ideal I"*

Demostración. El epimorfismo natural $A \to A/I$ define la inyección $Esp\,A/I \hookrightarrow Esp\,A$. Tenemos que probar que

$$Esp\,A/I(B) = \{x \in Esp\,A(B),\ \text{tales que } i(x) = 0,\ \text{para todo } i \in I\}$$

que es la propiedad universal del cociente por un ideal recién enunciada.

□

Sea S un sistema multiplicativo de A (es decir, $1 \in S$ y si $s, s' \in S$ entonces $s \cdot s' \in S$). Consideremos la localización de A por S, A_S, es decir,

$$A_S = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{a}{s},\ a \in A \text{ y } s \in S\colon & \dfrac{a}{s} = \dfrac{a'}{s'} \text{ si existen } s_1, s_2 \in S \text{ tales que las fracciones} \\ & \dfrac{s_1 a}{s_1 s}, \dfrac{s_2 a'}{s_2 s'} \text{ tienen el mismo numerador y denominador} \end{array} \right\}^{1}$$

Ejemplos de localización son los cuerpos $\mathbb{Q} = \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}-\{0\}}$ y $\mathbb{Q}(x) = \mathbb{Q}[x]_{\mathbb{Q}[x]-\{0\}}$.

Con la suma y producto ordinarios de fracciones A_S es un anillo. Al morfismo natural de anillos $A \to A_S$, $a \mapsto \frac{a}{s}$ se le denomina morfismo de localización por S. El cual verifica la propiedad universal:

$$\operatorname{Hom}_{\text{Anillos}}(A_S, B) = \{f \in \operatorname{Hom}_{\text{Anillos}}(A,B)\colon f(s) \text{ es invertible en } B,\ \text{para todo } s \in S\}$$

En efecto: Dado un morfismo de anillos $f\colon A \to B$, tal que $f(s)$ es invertible para todo $s \in S$, el morfismo $f'\colon A_S \to B$, $f'(a/s) := f(a)f(s)^{-1}$ está bien definido, pues si $a/s = a'/s'$ entonces

[1]Observemos que $\frac{a}{s} = \frac{a}{s}$, que si $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$ entonces $\frac{a'}{s'} = \frac{a}{s}$, y que si $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$ y $\frac{a'}{s'} = \frac{a''}{s''}$ entonces $\frac{a}{s} = \frac{a''}{s''}$.

existen $t, t' \in S$ de modo que at/st y $a't'/s't'$ tienen los mismos numeradores denominadores, luego $f(a)f(s)^{-1} = f(a)f(t)f(s)^{-1}f(t)^{-1} = f(a')f(t')f(s')^{-1}f(t')^{-1} = f(a')f(s')^{-1}$. Además, el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & A_S \arrow[d, "f'"] \\ & B \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Si $g\colon A_S \to B$ es otro diagrama que hace conmutativo el diagrama, tendremos que $g(a/1) = f(a)$, además $g(1/s) = g(s/1)^{-1} = f(s)^{-1}$, luego $g(a/s) = f(a)f(s)^{-1} = f'(a/s)$. Con todo ahora ya es fácil concluir.

6. Proposición : *"Los puntos de $Esp\, A_S$ se identifican con los puntos de $Esp\, A$ donde todas las $s \in S$ son invertibles".*

Demostración. Dado el morfismo natural $A \to A_S$, tenemos el morfismo natural $Esp\, A_S \to Esp\, A$. Tenemos que probar que vía este morfismo

$$Esp\, A_S(B) = \{x \in Esp\, A(B) \colon s(x) \text{ es invertible, para todo } s \in S\}$$

que es justamente la propiedad universal de A_S recién enunciada. □

Dados dos A-módulos M, N recordemos la definición de producto tensorial de los dos módulos:

$$M \otimes_A N := \left\{ \begin{array}{l} \text{Sumas formales finitas } \sum_i a_i \cdot (m_i \circledast n_i) \\ \text{con } a_i \in A, m_i \in M, n_i \in A \end{array} \right\} \Big/ \left\langle \begin{array}{l} (am_1 + m_2) \circledast n - a \cdot (m_1 \circledast n) - m_2 \circledast n \\ m \circledast (an_1 + n_2) - a(m \circledast n_1) - m \circledast n_2 \\ \text{con } a \in A, m_i \in M, n_i \in N \end{array} \right\rangle$$

Se denota $\overline{m \circledast n} = m \otimes n$.

$M \otimes_A N$ cumple la siguiente propiedad universal:

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, P) & = & \mathrm{Bil}_A(M \times N; P) & \\ f & \mapsto & \tilde{f} & \qquad \tilde{f}((m,n)) := f(m \otimes n) \end{array}$$

Si A y B son dos k-álgebras entonces al k-módulo $A \otimes_k B$ se le puede dotar de estructura de k-álgebra: $(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') := aa' \otimes bb'$, $k \to A \otimes B$, $\lambda \mapsto \lambda \otimes 1$. $A \otimes_k B$ cumple la siguiente propiedad universal

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Hom}_{k-alg}(A \otimes_k B, C) & = & \mathrm{Hom}_{k-alg}(A, C) \times \mathrm{Hom}_{k-alg}(B, C) & \\ f & \mapsto & (f_1, f_2) & \qquad f_1(a) := f(a \otimes 1),\ f_2(b) := f(1 \otimes b) \end{array}$$

para toda k-álgebra C.

Dados dos funtores $F_1, F_2 \colon \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}_{Conj}$ se define $F_1 \times F_2 \colon \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}_{Conj}$ como el functor $(F_1 \times F_2)(A) = F_1(A) \times F_2(A)$.

7. Proposición : *Se cumple que $Esp\, A \times Esp\, B = Esp\,(A \otimes_k B)$.*

Demostración. Tenemos que probar, para toda k-álgebra C, que

$$(Esp\, A \times Esp\, B)(C) = Esp\,(A \otimes_k B)(C)$$

lo cual es la propiedad universal del producto tensorial de k-álgebras □

Observemos que $Esp(p_1(x) = \cdots = p_r(x) = 0) \times Esp(q_(y) = \cdots = q_s(y) = 0) = Esp(p_1(x) = \cdots = p_r(x) = q_(y) = \cdots = q_s(y) = 0)$. Por lo tanto,

$$k[x,y]/(p_i(x), q_j(y)) = k[x]/(p_i(x)) \otimes_k k[y]/(q_j(y))$$

Dados dos morfismo de funtores $f\colon F_1 \to F$, $g\colon F_2 \to F$ se define el producto fibrado $F_1 \times_F F_2$, como sigue

$$(F_1 \times_F F_2)(A) := F_1(A) \times_{F(A)} F_2(A) = \{(x_1, x_2) \in F_1(A) \times F_2(A) \text{ tales que } f_A(x_1) = g_A(x_2)\}$$

8. Proposición : *Sean $C \to A$ y $C \to B$ dos morfismos de k-álgebras. Tenemos pues los morfismos $Esp\, A \to Esp\, C$ y $Esp\, B \to Esp\, C$. Se cumple que*

$$Esp\, A \times_{Esp\, C} Esp\, B = Esp\, (A \otimes_C B)$$

Demostración. Tenemos que probar que

$$Esp\, A(D) \times_{Esp\, C(D)} Esp\, B(D) = Esp\, (A \otimes_C B)(D)$$

para toda k-álgebra D. En efecto, tenemos la igualdad

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Hom}_{k-alg}(A \otimes_C B, D) & = & \operatorname{Hom}_{k-alg}(A, D) \times_{\operatorname{Hom}_{k-alg}(C,D)} \operatorname{Hom}_{k-alg}(B, D) \\ f & \longmapsto & (f_1, f_2) \quad f_1(a) := f(a \otimes 1), f_2(b) := f(1 \otimes b) \\ F & \longleftarrow & (f_1, f_2) \quad F(a \otimes b) := f_1(a) \cdot f_2(b) \end{array}$$

□

1.5. Espectro primo de un anillo

Sea A una k-álgebra. Estudiemos “los puntos racionales” de $Esp\, A(k) = \operatorname{Hom}_{k-alg}(A, k)$. Todo morfismo de k-álgebras de $A \to k$ es epiyectivo ($\lambda \mapsto \lambda$, $\lambda \in k$). Por tanto, f es la composición del morfismo de paso al cociente $A \to A/\operatorname{Ker} f$ con un isomorfismo de k-álgebras $A/\operatorname{Ker} f \simeq k$. En particular, el morfismo natural $k \hookrightarrow A/\operatorname{Ker} f$ (composición de los morfismos $k \hookrightarrow A \to A/\operatorname{Ker} f$) es un isomorfismo y podemos escribir $k = A/Kerf$. Además la composición, $k = A/Kerf \simeq k$ es el morfismo identidad. En conclusión, tenemos la igualdad

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Hom}_{k-alg}(A, k) & = & \{\text{Ideales } \mathfrak{m} \subset A, \text{ tales que } k = A/\mathfrak{m}\} \\ f & \longmapsto & \operatorname{Ker} f \\ A \to A/\mathfrak{m} & \longleftarrow & \mathfrak{m} \end{array}$$

Los ideales $\mathfrak{m}$ de la k-álgebra A tales que $k = A/\mathfrak{m}$ se denominan ideales maximales racionales.

1. Ejemplo :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Soluciones sobre } k \text{ del sistema} \\ p_1(x_1, \ldots, x_x) = \cdots = p_r(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{array} \right\} \overset{1}{=} \operatorname{Hom}_{k-alg}(k[x_1, \ldots, x_n]/(p_1, \ldots, p_r), k)$$

$$\overset{2}{=} \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{m} \subset k[x_1, \ldots, x_n]/(p_1, \ldots, p_r) \text{ tales que} \\ k = (k[x_1, \ldots, x_n]/(p_1, \ldots, p_r))/\mathfrak{m} \end{array} \right\}$$

1. $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto f$, donde $f(\bar{x}_i) := \alpha_i$.

2. $f \mapsto \operatorname{Ker} f$. Explícitamente, $\operatorname{Ker} f = (\bar{x}_1 - \alpha_1, \dots, \bar{x}_n - \alpha_n)$, (donde $f(\bar{x}_i) = \alpha_i$): Obviamente, $\mathfrak{m} = (\bar{x}_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n) \subseteq \operatorname{Ker} f$. Por tanto, el morfismo

$$(k[x_1, \dots, x_n]/(p_1, \dots, p_r))/\mathfrak{m} \to k$$

es epiyectivo Es obvio que el morfismo $k \to (k[x_1, \dots, x_n]/(p_1, \dots, p_r))/\mathfrak{m}$, $\lambda \mapsto \lambda$ es epiyectivo. Luego,$(k[x_1, \dots, x_n]/(p_1, \dots, p_r))/\mathfrak{m} = k$.

Sea A un anillo.

2. Definición : Diremos que un ideal $\mathfrak{m} \underset{\neq}{\subset} A$ es maximal si los únicos ideales que contienen a $\mathfrak{m}$ son $\mathfrak{m}$ y A.

3. Proposición : *En todo anillo $A \neq 0$ existen ideales maximales.*

Demostración. Esta es una aplicación típica del lema de Zorn (que puede evitarse en anillos noetherianos). Sea X el conjunto de los ideales de A, distintos de A. En X podemos definir una relación de orden: decimos que un ideal I es menor o igual que otro I' cuando $I \subseteq I'$. Observemos que toda cadena de ideales, distintos de A tiene una cota superior: la unión de los ideales de la cadena (que es distinto de A, pues el 1 no está en ninguno de ellos, ni por tanto en la unión). El lema de Zorn nos dice que existen elementos de X maximales, es decir, existen ideales maximales. □

4. Corolario : *Todo ideal $I \underset{\neq}{\subset} A$ está incluido en un ideal maximal.*

Demostración. Sea $\pi\colon A \to A/I$ el morfismo de paso al cociente. En la correspondencia biunívoca

$$\left\{\begin{matrix}\text{Ideales de } A\\ \text{que contienen a } I\end{matrix}\right\} = \{\text{Ideales de } A/I\}$$

$$J \longmapsto \pi(J)$$

$$\pi^{-1}(J') \longleftarrow J'$$

los ideales maximales de A que contienen a I se corresponden con los ideales maximales de A/I, que no es vacío por la proposición anterior. □

Un elemento $a \in A$ es invertible si y sólo si $(a) = A$ (suponemos $A \neq 0$). Por tanto, $a \in A$ es invertible si y sólo si no está incluido en ningún ideal maximal. En particular, un anillo es un cuerpo si y sólo si los únicos ideales del anillo son el (0) y todo el anillo.

5. Proposición : *Un ideal $\mathfrak{m} \underset{\neq}{\subset} A$ es maximal si y sólo si $A/\mathfrak{m}$ es un cuerpo.*

Demostración. $A/\mathfrak{m}$ es cuerpo si y sólo si el único ideal maximal es el (0). Que equivale a decir que el único ideal que contiene a $\mathfrak{m}$ es $\mathfrak{m}$ (y A), es decir, que $\mathfrak{m}$ es maximal. □

6. Definición : Un ideal $\mathfrak{p} \underset{\neq}{\subset} A$, diremos que es un ideal primo de A, si cumple que si $ab \in \mathfrak{p}$ entonces $a \in \mathfrak{p}$ o $b \in \mathfrak{p}$.

Un elemento $a \in A$, diremos que es un divisor de cero, si existe $b \in A$, no nulo tal que $ab = 0$. Diremos que un anillo es íntegro si el único divisor de cero es el cero. Por ejemplo, los cuerpos son anillos íntegros.

7. Proposición : *Un ideal $\mathfrak{p} \underset{\neq}{\subset} A$ es un ideal primo si y sólo si $A/\mathfrak{p}$ es un anillo íntegro.*

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{p} \subset A$ es un ideal primo. Si $\bar{a} \cdot \bar{a'} = 0$ en $A/\mathfrak{p}$ entonces $\overline{a \cdot a'} = 0$, luego $a \cdot a' \in \mathfrak{p}$. Por tanto, o $a \in \mathfrak{p}$ o $a' \in \mathfrak{p}$, luego o $\bar{a} = 0$ o $\bar{a}' = 0$. En conclusión $A/\mathfrak{p}$ es íntegro.

Recíprocamente, supongamos que $A/\mathfrak{p}$ es íntegro. Si $a \cdot a' \in \mathfrak{p}$, entonces $\overline{a \cdot a'} = 0$ en $A/\mathfrak{p}$. Por tanto, $\bar{a} \cdot \bar{a'} = 0$, luego o $\bar{a} = 0$ o $\bar{a}' = 0$. Es decir, o $a \in \mathfrak{p}$ o $a' \in \mathfrak{p}$. En conclusión, $\mathfrak{p}$ es un ideal primo. □

En particular, los ideales maximales son ideales primos, por la proposición.

Se dice que un ideal primo es minimal si no contiene estrictamente ningún ideal primo.

8. Ejercicio : En todo anillo $A \neq 0$ existen ideales primos minimales.

9. Definición : Se llama espectro primo de un anillo A al conjunto $\operatorname{Spec} A$ de sus ideales primos.

Notación: Un ideal primo lo denotaremos por x cuando lo consideremos como elemento de $\operatorname{Spec} A$, y por $\mathfrak{p}_x$ cuando lo consideremos como ideal de A.

Llamaremos funciones a los elementos del anillo A y puntos a los elementos de $\operatorname{Spec} A$. Diremos que una función $a \in A$ se anula en un punto $x \in \operatorname{Spec} A$ cuando $a \in \mathfrak{p}_x$, es decir, cuando $0 = \bar{a} \in A/\mathfrak{p}_x$ (suele denotarse $a(x) = \bar{a} \in A/\mathfrak{p}_x$). Como $\mathfrak{p}_x$ es un ideal primo se verifica:

1. La función 0 se anula en todos los puntos de $\operatorname{Spec} A$.
2. Si dos funciones se anulan en un punto x, su suma también.
3. Si una función se anula en un punto x, sus múltiplos también.
4. Si un producto de funciones se anula en un punto x, algún factor se anula en x.

10. Definición : Sea A un anillo. Si $f \in A$, llamaremos *ceros* de la función f al subconjunto $(f)_0 \subset \operatorname{Spec} A$ formado por todos los puntos donde se anule f. Llamaremos ceros de un ideal $I \subseteq A$ al subconjunto de $\operatorname{Spec} A$ formado por los puntos donde se anulen todas las funciones de I y lo denotaremos $(I)_0$, es decir,

$$(I)_0 = \underset{f \in I}{\cap} (f)_0 = \left\{ \begin{array}{r} \text{Ideales primos } \mathfrak{p}_x \subset A \\ \text{tales que } I \subseteq \mathfrak{p}_x \end{array} \right\}$$

11. Ejercicio : Probar que una función $f \in A$ es invertible si y sólo si no se anula en ningún punto de $\operatorname{Spec} A$. Probar que $p(x, y)$ se anula en el ideal primo $\mathfrak{m}_{\alpha,\beta} = (x - \alpha, y - \beta) \subset k[x, y]$ si y sólo si $p(\alpha, \beta) = 0$.

12. Proposición : *Se verifican las siguientes igualdades:*

1. $(0)_0 = \operatorname{Spec} A$ *y* $(A)_0 = \emptyset$.
2. $(\sum_{j \in J} I_j)_0 = \underset{j \in J}{\cap} (I_j)_0$.
3. $(\overset{n}{\underset{j=1}{\cap}} I_j)_0 = \overset{n}{\underset{j=1}{\cup}} (I_j)_0$.

Demostración. Todas las igualdades son de demostración inmediata, salvo quizás la 3. Para ésta, basta probar que $(I_1 \cap I_2)_0 = (I_1)_0 \cup (I_2)_0$. Veámoslo:

Obviamente, $(I_1 \cap I_2)_0 \supseteq (I_1)_0 \cup (I_2)_0$. Veamos la otra inclusión: Sea $x \in (I_1 \cap I_2)_0$. Si $x \notin (I_1)_0$ y $x \notin (I_2)_0$, entonces existe $f_1 \in I_1$ y $f_2 \in I_2$ que no se anulan en x, luego $f_1 \cdot f_2$ no se anula en x. Pero como $f_1 \cdot f_2 \in I_1 \cap I_2$ llegamos a contradicción con que $x \in (I_1 \cap I_2)_0$. Por tanto, $x \in (I_1)_0 \cup (I_2)_0$ y $(I_1 \cap I_2)_0 \subseteq (I_1)_0 \cup (I_2)_0$.

□

13. Ejercicio : Demostrar que $(I_1 \cdot I_2)_0 = (I_1)_0 \cup (I_2)_0$, donde denotamos por $I_1 \cdot I_2 = \{\sum_i a_i b_i \mid a_i \in I_1, b_i \in I_2\}$.

14. Definición : Llamamos topología de Zariski de $\operatorname{Spec} A$, a la topología sobre $\operatorname{Spec} A$ cuyos cerrados son los ceros de los ideales de A.

La proposición anterior nos dice que la topología de Zariski es efectivamente una topología.

15. Ejercicio : Determinar los puntos y la topología de $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.

Dado un punto $x \in \operatorname{Spec} A$ y un cerrado $C = (I)_0$, si $x \notin C$ existe $f \in I \subseteq A$ que no se anula en x, "las funciones de A separan puntos de cerrados en $\operatorname{Spec} A$".

Dada una inclusión $I_1 \subseteq I_2$ de ideales se tiene que $(I_1)_0 \supseteq (I_2)_0$. Dado un cerrado C se verifica que $C = (I)_0$, donde I es el ideal de todas las funciones que se anulan en C: Obviamente $C \subseteq (I)_0$. Por otra parte $C = (J)_0$ para algún ideal $J \subseteq A$. Tenemos que las funciones de J se anulan en C, luego $J \subseteq I$. Por tanto, $C = (J)_0 \supseteq (I)_0$. Hemos concluido.

Si bien, $C = (I)_0$, donde I es el ideal de todas las funciones que se anulan en C, pueden existir ideales $J \underset{\neq}{\subset} I$ tales que $C = (I)_0 = (J)_0$. Por ejemplo, $(4)_0 = (2)_0 \subset \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.

Dado un subconjunto Y de $\operatorname{Spec} A$, denotamos por $\bar{Y}$ el cierre de Y en $\operatorname{Spec} A$.

16. Proposición : *Dado $x \in \operatorname{Spec} A$ se verifica que $\bar{x} = (\mathfrak{p}_x)_0$. En particular, $\operatorname{Spec} A$ es un espacio topológico T_0 (puntos distintos tienen cierres distintos) y un punto x es cerrado si y sólo si $\mathfrak{p}_x$ es un ideal maximal.*

Demostración. El cierre de x, $\bar{x}$ será de la forma $\bar{x} = (I)_0$, para cierto ideal $I \subset A$. Obviamente, como $x \in \bar{x}$, tenemos que $I \subseteq \mathfrak{p}_x$. Por tanto, $(\mathfrak{p}_x)_0 \subseteq (I)_0$. Ahora bien, $(I)_0$ es el menor cerrado que contiene a x y $x \in (\mathfrak{p}_x)_0$, luego $(\mathfrak{p}_x)_0 = (I)_0 = \bar{x}$.

□

17. Definición : Diremos que un espacio topológico es irreducible cuando no pueda descomponerse como unión de dos cerrados estrictamente menores. Llamaremos componentes irreducibles de un espacio topológico a los subespacios irreducibles maximales de X, es decir, los subespacios irreducibles no contenidos estrictamente en otro subespacio irreducible.

El cierre de un subespacio irreducible es irreducible, en particular las componentes irreducibles de un espacio son cerradas.

18. Proposición : *Cada cerrado irreducible del espectro de un anillo es el cierre de un único punto, llamado punto genérico de tal cerrado. En particular, las componentes irreducibles de $\operatorname{Spec} A$ son los cierres de los puntos definidos por los ideales primos minimales de A.*

Demostración. Sea C un cerrado irreducible. Sabemos que $C = (I)_0$, donde I es el ideal de todas las funciones que se anulan en C.

Basta ver que I es primo, porque si $I = \mathfrak{p}_x$ entonces $(I)_0 = \bar{x}$. Si $f \cdot g \in I$, es decir, $f \cdot g$ se anula en C, entonces

$$C = C \cap (fg)_0 = C \cap ((f)_0 \cup (g)_0)) = (C \cap (f)_0) \cup (C \cap (g)_0)$$

luego, o bien f se anula en C, o bien g, porque C es irreducible. Es decir, o bien $f \in I$, o bien $g \in I$.

$C = \bar{x}$ es una componente irreducible si y sólo si no está incluido estrictamente en otro cerrado irreducible $C' = \bar{x}'$, es decir, si y sólo si $\mathfrak{p}_{x'} \not\subseteq \mathfrak{p}_x$, es decir, si y sólo si $\mathfrak{p}_x$ es un ideal primo minimal. □

19. Ejercicio: Calcular las componentes irreducibles de $\operatorname{Spec} k[x,y]/(xy)$.

20. Ejemplo: Los ideales primos de $k[x]$ son los ideales $(p(x))$, con $p(x)$ primo o irreducible y el ideal (0). Si $k = \mathbb{C}$, los ideales primos de $\mathbb{C}[x]$ son $\mathfrak{m}_\alpha = (x - \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ y (0). Así que los ideales primos maximales de $\mathbb{C}[x]$ se corresponden con los puntos de una recta afín. De aquí que se siga la notación $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x] = \mathbb{A}_1(\mathbb{C})$. En resumen

$$\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x] = \begin{cases} \text{Puntos cerrados: } \alpha \equiv (x - \alpha), \text{ con } \alpha \in \mathbb{C}. \\ \text{Punto “genérico”: } g \equiv (0). \end{cases}$$

En general, si k es un cuerpo, diremos que $\operatorname{Spec} k[x]$ es la recta afín sobre k.

Dado un ideal $(p(x))$ los ceros de $(p(x))$ se corresponden con las raíces de $p(x)$, salvo cuando $p(x) = 0$, en este caso los ceros es todo el espectro. Por tanto, los cerrados de la topología de Zariski de $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x]$, a parte del vacío y el total, son los conjuntos finitos de puntos cerrados (de la recta afín).

21. Ejemplo: Sea $X = [0,1] \subset \mathbb{R}$ y $C(X)$ el anillo de funciones reales continuas definidas sobre X. Dado un punto $p \in X$, el ideal $\mathfrak{m}_p$ de funciones que se anulan en p es un ideal maximal, porque $C(X)/\mathfrak{m}_p \simeq \mathbb{R}$, $\bar{f} \mapsto f(p)$.

Veamos el recíproco: dado un ideal maximal $\mathfrak{m} \subset C(X)$, si $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_p$ para todo $p \in X$, entonces para cada $p \in X$ existe una función $f_p \in \mathfrak{m}$ que no se anula en p, luego tampoco en un entorno U_p de p. Como X es compacto, un número finito $U_{p_1}, \dots, U_{p_n}$ recubren X. Por tanto, $f = f_{p_1}^2 + \cdots + f_{p_n}^2$ no se anula en ningún punto de X, luego es invertible y $f \in \mathfrak{m}$, contradicción.

Si denotamos por $\operatorname{Spec}_m A$ el subespacio de $\operatorname{Spec} A$ formado por los ideales primos maximales, es fácil comprobar que la biyección

$$X = \operatorname{Spec}_m C(X), \ p \mapsto \mathfrak{m}_p$$

es un homeomorfismo. Dado un ideal I, denotemos $(I)_0^m = (I)_0 \cap \operatorname{Spec}_m A$. Bien, a través de la igualdad anterior, se cumple que $\{x \in X, \text{ tales que } f(x) = 0, \text{ para toda } f \in I\} = (I)_0^m$.

22. Teorema: *El espectro primo de un anillo es un espacio topológico compacto.*

Demostración. Sea $C_j = (I_j)_0$ una familia arbitraria de cerrados de $\operatorname{Spec} A$. Si $\underset{j}{\cap} C_j = \emptyset$ entonces

$$\emptyset = \underset{j}{\cap} (I_j)_0 = (\sum_j I_j)_0$$

Por tanto, $\sum_j I_j = A$. Luego $1 = f_1 + \cdots + f_n$ para ciertas $f_1 \in I_{j_1}, \dots, f_n \in I_{j_n}$. Luego, de nuevo $I_{j_1} + \cdots + I_{j_n} = A$ y

$$(I_{j_1})_0 \cap \cdots \cap (I_{j_n})_0 = \emptyset$$

es decir, $C_{j_1} \cap \cdots \cap C_{j_n} = \emptyset$ y $\operatorname{Spec} A$ es compacto.

□

Sea $j\colon A \to B$ un morfismo de anillos. Si J es un ideal de B, entonces $j^{-1}(J) := \{a \in A\colon j(a) \in J\}$ es un ideal de A. Es fácil comprobar que si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de B entonces $j^{-1}(\mathfrak{p})$ es un ideal primo de A. Obtenemos así una aplicación natural

$$j^*\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A, \quad j^*(\mathfrak{p}) = j^{-1}(\mathfrak{p})$$

23. Teorema: *La aplicación inducida en los espectros por cualquier morfismo de anillos es continua.*

Demostración. Consideremos los morfismos

$$\begin{array}{c} A \xrightarrow{\ j\ } B \\ \operatorname{Spec} A \xleftarrow[j^*]{} \operatorname{Spec} B \end{array}$$

Sea $(I)_0 \subset \operatorname{Spec} A$ un cerrado. Entonces

$$\begin{aligned} {j^*}^{-1}((I)_0) &= \{x \in \operatorname{Spec} B\colon j^*(x) \in (I)_0\} = \{x \in \operatorname{Spec} B\colon j^{-1}(\mathfrak{p}_x) \supseteq I\} \\ &= \{x \in \operatorname{Spec} B\colon \mathfrak{p}_x \supseteq j(I)\} = ((j(I)))_0 \end{aligned}$$

y concluimos que j^* es continua.

□

24. Ejercicio: Sea $X = [0,1] \subset \mathbb{R}$ y $C(X)$ el anillo de las funciones reales continuas definidas en X. Probar que la aplicación

$$\operatorname{Hom}_{\text{cont.}}(X, X) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}-\text{alg}}(C(X), C(X)), \qquad \phi \mapsto \phi^*\colon f \mapsto f \circ \phi$$

es biyectiva (usar el ejemplo 1.5.21 y que todo morfismo $C(X) \to C(X)$ induce un morfismo entre los espectros).

25. Teorema: *Sea I un ideal de A. Consideremos los morfismos naturales*

$$\begin{array}{cc} A \xrightarrow{\ \pi\ } A/I & \qquad a \longmapsto \bar{a} \\ \operatorname{Spec} A \xleftarrow[\pi^*]{} \operatorname{Spec} A/I & \end{array}$$

Se verifica que π^* es un homeomorfismo de $\operatorname{Spec} A/I$ *con su imagen, que es el cerrado $(I)_0$.*

Demostración. Los ideales primos de A/I se corresponden con los ideales primos de A que contienen a I. Explícitamente,

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ideales primos de } A \\ \text{que contienen a } I \end{array}\right\} = \{\text{Ideales primos de } A/I\}$$

$$\mathfrak{p} \longmapsto \pi(\mathfrak{p})$$

$$\pi^{-1}(\mathfrak{p}') \longleftarrow\!\shortmid\ \mathfrak{p}'$$

que es justamente el morfismo

$$\operatorname{Spec} A \supseteq (I)_0 \xlongequal{\pi^*} \operatorname{Spec} A/I$$

Lo que demuestra la biyección buscada. Sabemos que π^* es continua, para ver que la biyección es un homeomorfismo, nos falta probar que π^* es cerrada. Igualmente, los ideales primos de A/I que contienen a un ideal J, se corresponden con los ideales primos de A que contienen a $\pi^{-1}(J)$. Es decir, $\pi^*((J)_0) = (\pi^{-1}(J))_0$. Por tanto, π^* es cerrada.

□

26. Ejercicio : Sea Y un subespacio cerrado de un espacio topológico X. Probar que el subconjunto, del anillo de funciones reales continuas $C(X)$ de X, formado por las funciones que se anulan en Y es un ideal, I. Si X es un espacio topológico normal probar que $C(X)/I \simeq C(Y)$ (recuérdese que el teorema de extensión de Tietze afirma que toda función continua sobre un cerrado Y admite una extensión continua a todo X).

27. Corolario : $\operatorname{Spec}(A \times B) = (\operatorname{Spec} A) \coprod (\operatorname{Spec} B)$.

Demostración. Consideremos en el anillo $A \times B$ los ideales $I = A \times 0$, $J = 0 \times B$. Como $I + J = A \times B$ y $I \cap J = 0$, tomando ceros tenemos $(I)_0 \cap (J)_0 = \emptyset$ y $(I)_0 \cup (J)_0 = \operatorname{Spec}(A \times B)$. Es decir, $\operatorname{Spec}(A \times B) = (I)_0 \coprod (J)_0$.

Para concluir basta observar que, de acuerdo con el teorema anterior,

$$\begin{aligned} (I)_0 &= \operatorname{Spec}(A \times B)/I = \operatorname{Spec} B \\ (J)_0 &= \operatorname{Spec}(A \times B)/J = \operatorname{Spec} A \end{aligned}$$

□

Explícitamente, los ideales primos de $A \times B$ son de la forma $\mathfrak{p} \times B$ o $A \times \mathfrak{q}$, donde $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A y $\mathfrak{q}$ es un ideal primo de B.

28. Ejercicio : Sean X e Y espacios topológicos y consideremos el espacio topológico $X \coprod Y$. Demostrar que

$$C(X \coprod Y) = C(X) \times C(Y)$$

Justificar la frase "$A \times B$ es el anillo de funciones de $\operatorname{Spec} A \coprod \operatorname{Spec} B$".

1.6. Localización. Fórmula de la fibra

Nuestro primer objetivo es mostrar que el proceso algebraico de división se va a corresponder con el proceso topológico de localización.

Dado un morfismo de anillos $j \colon A \to B$, cuando no cause confusión, seguiremos las siguientes notaciones: dado un ideal J de B, escribiremos $j^{-1}(J) = J \cap A$, dado un ideal I de A escribiremos $(j(I)) = j(I) \cdot B = I \cdot B$.

1. Teorema : *Consideremos el morfismo $j \colon A \to A_S$, $a \mapsto \frac{a}{1}$, de localización por S. La aplicación inducida $j^* \colon \operatorname{Spec} A_S \to \operatorname{Spec} A$ establece un homeomorfismo de $\operatorname{Spec} A_S$ con su imagen, que está formada por los puntos donde no se anula ninguna función de S:*

$$\operatorname{Spec} A_S \underset{j^*}{=} \{\text{ideales primos de } A \text{ que no cortan a } S\}$$

Demostración. Consideremos el morfismo de localización $j\colon A \to A_S$.

Las asignaciones

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} A_S \arrow[r, equal] & \{\text{Ideales primos de } A \text{ que no cortan a } S\} \subseteq \operatorname{Spec} A \\
\mathfrak{p}' \arrow[r, mapsto, "j^*"] & \mathfrak{p}' \cap A \\
\mathfrak{p} \cdot A_S & \mathfrak{p} \arrow[l, mapsto]
\end{tikzcd}$$

están bien definidas y son inversas entre sí, sin más que comprobar:

1. Si $\mathfrak{p}'$ es un ideal primo de A_S entonces $\mathfrak{p}' \cap A$ es un ideal primo de A que no corta con S y $(\mathfrak{p}' \cap A) \cdot A_S = \mathfrak{p}'$.

2. Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A que no corta con S entonces $\mathfrak{p} \cdot A_S$ es un ideal primo de A_S y $(\mathfrak{p} \cdot A_S) \cap A = \mathfrak{p}$.

Para ver que esta biyección es un homeomorfismo basta observar que $j^*((\frac{a}{s})_0) = j^*((\frac{a}{1})_0) = (a)_0 \cap \operatorname{Im} j^*$.

□

Notación: Sea A un anillo. Si $f \in A$, denotaremos A_f la localización de A por el sistema multiplicativo $S = \{1, f, f^2, \dots, f^n, \dots\}$.

Si x es un punto de $\operatorname{Spec} A$, denotaremos por A_x la localización de A por el sistema multiplicativo $S = A - \mathfrak{p}_x$.

2. Corolario : *El espectro de A_f es igual* $\operatorname{Spec} A - (f)_0$*:*

$$\operatorname{Spec} A_f = U_f$$

Demostración. Por el teorema anterior, $\operatorname{Spec} A_f$ se corresponde con los ideales primos $\mathfrak{p}_x$ de A que no cortan con $S = \{1, f, f^2, \dots, f^n, \dots\}$. Que equivale a decir que $\operatorname{Spec} A_f$ se corresponde con los ideales primos $\mathfrak{p}_x$ de A que no contienen a f, es decir, U_f. □

3. Ejercicio : Sea $C(\mathbb{R}^n)$ el anillo de funciones reales continuas sobre $\mathbb{R}^n$. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$, $C(U)$ el anillo de funciones reales continuas sobre U y S el sistema multiplicativo formado por las funciones que no se anulan en ningún punto de U. Probar que existe un isomorfismo natural $C(\mathbb{R}^n)_S = C(U)$. (Pista: Sea d la función distancia. Dada $h \in C(U)$, $s(x) = \frac{d(x, U^c)}{1+h^2(x)}$ no se anula en U, s y $f = h \cdot s$ son restricción de funciones continuas de $\mathbb{R}^n$ y $h = \frac{f}{s}$).

4. Corolario : *Los ideales primos de A_x se corresponden con los ideales primos de A contenidos en $\mathfrak{p}_x$. En particular, A_x tiene un único ideal maximal, que es $\mathfrak{p}_x \cdot A_x$.*

Demostración. $\operatorname{Spec} A_x$ se corresponde con los ideales primos de A que no cortan con $A - \mathfrak{p}_x$. Es decir, con los ideales primos de A contenidos en $\mathfrak{p}_x$. □

5. Definición : Los anillos con un único ideal maximal se les denomina anillos locales.

"Podemos decir que el anillo de funciones que consideramos en $U_f = \operatorname{Spec} A_f$ es A_f. Si S es el sistema multiplicativo de las funciones de A que no se anulan en ningún punto de U_f, el lector puede probar que $A_f = A_S$. Como es de desear, estamos diciendo que las funciones de U_f, son los cocientes a/b de funciones de $\operatorname{Spec} A$, donde b es una función que no se anula en ningún punto de U_f. Dado un punto x, es usual no querer fijar la atención en un entorno dado de x, sino considerar un entorno lo suficientemente pequeño, luego las funciones que no se anulan en x pasan a ser invertibles y consideraremos por tanto el anillo A_x. Así pues, A_x recoge el concepto impreciso de funciones en un entorno suficientemente pequeño de x".

6. Definición: Dado un anillo A, llamaremos radical de A al ideal formado por el conjunto de los elementos nilpotentes de A, es decir, si denotamos por $\operatorname{rad} A$ al radical de A, entonces

$$\operatorname{rad} A = \{a \in A \colon a^n = 0, \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$$

7. Corolario: *El radical de un anillo coincide con la intersección de todos los ideales primos del anillo:*

$$\operatorname{rad} A = \bigcap_{x \in \operatorname{Spec} A} \mathfrak{p}_x$$

Es decir, una función es nilpotente si y sólo si se anula en todo punto del espectro.

Demostración. Si $f \in A$ es nilpotente, i.e., $f^n = 0$ para un $n \in \mathbb{N}$, entonces f ha de pertenecer a todo ideal primo de A. Luego $\operatorname{rad} A \subseteq \bigcap_{x \in \operatorname{Spec} A} \mathfrak{p}_x$.

Sea ahora $f \in \bigcap_{x \in \operatorname{Spec} A} \mathfrak{p}_x$. Por el corolario 1.6.2, $\operatorname{Spec} A_f = \emptyset$. Por tanto, $A_f = 0$, es decir, $\frac{1}{1} = \frac{0}{1}$. Luego existe un $f^n \in \{1, f, f^2, \dots\}$, de modo que $f^n \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 1) = 0$. Entonces $f^n = 0$ y f es nilpotente. En conclusión $\operatorname{rad} A \supseteq \bigcap_{x \in \operatorname{Spec} A} \mathfrak{p}_x$ y hemos terminado. □

8. Definición: Sea $I \subset A$ un ideal. Se llama radical de I, que denotaremos por $r(I)$ a la intersección de todos los ideales primos que contienen a I.

Si $\pi \colon A \to A/I$ es el morfismo de paso al cociente entonces $\pi^{-1}(\operatorname{rad}(A/I)) = r(I)$. Porque $\pi^{-1}(\bigcap_{x \in \operatorname{Spec} A/I} \mathfrak{p}_x) = \bigcap_{x \in \operatorname{Spec} A/I} \pi^{-1}(\mathfrak{p}_x) = \bigcap_{I \subset \mathfrak{q}_x} \mathfrak{q}_x$.

Por tanto, por 1.6.7, $a \in r(I)$ si y sólo si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n \in I$.

9. Corolario: *Sea A un anillo noetheriano. Si I es un ideal radical, es decir, $I = r(I)$ si y sólo si I es la intersección de un número finito de ideales primos.*

Demostración. Se cumple que el radical conmuta con intersecciones finitas, es decir, $r(I_1 \cap \cdots \cap I_n)) = r(I_1) \cap \cdots r(I_n)$. Si $I = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n$, con $\mathfrak{p}_i$ ideales primos entonces $r(I) = r(\mathfrak{p}_1) \cap \cdots \cap r(\mathfrak{p}_n) = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n = I$.

Recíprocamente, $r(I)$ es la intersección de todos los ideales primos que contienen a I. Ahora bien, los ideales primos mínimos $\{\mathfrak{p}_i\}$ con la condición de contener a I son un número n finito, porque $\bar{\mathfrak{p}}_i \subset A/I$ son justamente los ideales primos minimales de A/I, que son un número finito. Por tanto, $r(I) = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n$.

□

Dado un morfismo de anillos $j \colon A \to B$ y un sistema multiplicativo $S \subseteq A$, escribiremos $B_S = B_{j(S)}$. Igualmente, dado un ideal primo $\mathfrak{p}_x$ de A, escribiremos $B_x = B_{j(A - \mathfrak{p}_x)}$.

10. Fórmula de la fibra : *Sea* $j\colon A\to B$ *un morfismo de anillos y* $j^*\colon \operatorname{Spec} B\to \operatorname{Spec} A$ *el morfismo inducido. Dado un punto* $x\in \operatorname{Spec} A$ *se verifica*

$$j^{*-1}(x)=\operatorname{Spec} B_x/\mathfrak{p}_x\cdot B_x$$

Si $\mathfrak{p}_x$ *es un ideal primo minimal se verifica* $j^{*-1}(x)=\operatorname{Spec} B_x$*.*
Si $\mathfrak{p}_x$ *es un ideal primo maximal se verifica* $j^{*-1}(x)=\operatorname{Spec} B/\mathfrak{p}_x\cdot B$*.*

Demostración.

$$\begin{aligned} j^{*-1}(x)&=\{y\in \operatorname{Spec} B\colon \mathfrak{p}_y\cap A=\mathfrak{p}_x\}\\ &=\{y\in \operatorname{Spec} B\colon \mathfrak{p}_y\cap A\subseteq \mathfrak{p}_x \text{ y } \mathfrak{p}_x\subseteq \mathfrak{p}_y\cap A\} \qquad (*)\\ &=\{y\in \operatorname{Spec} B\colon (\mathfrak{p}_y\cap A)\cap(A-\mathfrak{p}_x)=\emptyset \text{ y } \mathfrak{p}_x\subseteq \mathfrak{p}_y\cap A\}\\ &=\{y\in \operatorname{Spec} B\colon \mathfrak{p}_y\cap j((A-\mathfrak{p}_x))=\emptyset \text{ y } j(\mathfrak{p}_x)\subseteq \mathfrak{p}_y\}\\ &=\{y\in \operatorname{Spec} B_x\colon j(\mathfrak{p}_x)\subseteq \mathfrak{p}_y\}=\operatorname{Spec} B_x/\mathfrak{p}_x\cdot B_x \end{aligned}$$

Las dos afirmaciones siguientes de la proposición, se deducen de que en $(*)$ podemos prescindir de una de las dos condiciones, en la primera afirmación de la segunda condición y en la segunda afirmación de la primera condición.

□

Observemos que las fibras pueden ser vacías, pues si un anillo $C=0$ entonces $\operatorname{Spec} C=\emptyset$.

11. Ejemplo : Calculemos $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[x,y]$. Consideremos el morfismo $i\colon \mathbb{C}[x]\to\mathbb{C}[x,y], p(x)\mapsto p(x)$ y sea $i^*\colon \operatorname{Spec}\mathbb{C}[x,y]\to\operatorname{Spec}\mathbb{C}[x]$ el morfismo inducido en los espectros. Cada punto de $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[x,y]$ está en la fibra de un único punto de $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[x]$, así que vamos a calcular tales fibras.

Los ideales primos de $\mathbb{C}[x]$ son el ideal (0) y los ideales maximales $\mathfrak{m}_\alpha=(x-\alpha)$. Según la fórmula de la fibra

$$i^{*-1}(\alpha)=\operatorname{Spec}\mathbb{C}[x,y]/\mathfrak{m}_\alpha\mathbb{C}[x,y]=\operatorname{Spec}\mathbb{C}[x,y]/(x-\alpha)$$

Ahora bien, $\mathbb{C}[x,y]/(x-\alpha)\simeq\mathbb{C}[y]$, $x\mapsto\alpha, y\mapsto y$. Luego,

$$i^{*-1}(\alpha)=\operatorname{Spec}\mathbb{C}[y]=\{(y-\beta),(0) \text{ con } \beta\in\mathbb{C}\}$$

que se corresponden con los ideales primos de $\mathbb{C}[x,y]$, $(x-\alpha,y-\beta),(x-\alpha)$.

Sólo nos falta calcular la fibra de $(0)=\mathfrak{p}_g$

$$i^{*-1}(g)=\operatorname{Spec}\mathbb{C}[x,y]_{\mathbb{C}[x]-(0)}=\operatorname{Spec}\mathbb{C}(x)[y]$$

Los ideales primos no nulos de $\mathbb{C}(x)[y]$ están generados por un polinomio irreducible con coeficientes en $\mathbb{C}(x)$ de grado mayor o igual que 1 en y. Por el Lema de Gauss se corresponden con los polinomios $p(x,y)\in\mathbb{C}[x,y]$ irreducibles de grado mayor o igual que 1 en y. Por tanto, $i^{*-1}(g)$ está formado por los ideales primos $(p(x,y))$, (0) (donde $p(x,y)$ es un polinomio irreducible de grado mayor o igual que 1 en y)

En resumen, los puntos de $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[x,y] \underset{\text{Not}}{=} \mathbb{A}_2(\mathbb{C})$ son

1. Los puntos cerrados (α,β), es decir, los ideales primos $(x-\alpha,y-\beta)$.
2. Los puntos genéricos de las curvas irreducibles $(p(x,y))_0\equiv p(x,y)=0$, es decir, los ideales primos $(p(x,y))$, $p(x,y)$ irreducible.

3. El punto genérico del plano afín $(0)_0 \equiv \mathbb{A}_2(\mathbb{C})$, es decir, el ideal primo (0).

12. Ejemplo : Calculemos $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x,y]/(q(x,y))$. Consideremos la descomposición en producto de polinomios irreducibles $q(x,y) = q_1(x,y)^{n_1} \cdots q_r(x,y)^{n_r}$, que no difieran en factores constantes. Tenemos que $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x,y]/(q(x,y)) = (q(x,y))_0 = \overset{r}{\underset{i=1}{\cup}} (q_i(x,y))_0$ que son:

1. Los ideales maximales $(x-\alpha, y-\beta)$ tales que $(q(x,y)) \subseteq (x-\alpha, y-\beta)$. Es decir, con otras notaciones, los puntos (α,β) tales que $q(\alpha,\beta) = 0$.

2. Los puntos genéricos de las curvas irreducibles $q_i(x,y) = 0$.

1.7. Relación entre el espacio y el espectro de un anillo

Dado un punto $p \in \operatorname{Spec} A$ se dice que $k(p) := (A/\mathfrak{p}_p)_p$ es el cuerpo residual de p.

Sea A una k-álgebra y Σ una extensión de cuerpos de k que sea algebraicamente cerrada y contenga todos los cuerpos residuales $k(p)$, $p \in \operatorname{Spec} A$ (por ejemplo, el cierre algebraico de un compuesto de todos los cuerpos $k(p)$).

Digamos que dos morfismo $f, g \in \operatorname{Hom}_k(A, \Sigma)$ son equivalentes si existe un isomorfismo de k-álgebras $\phi\colon \Sigma \to \Sigma$ tal que $f = \phi \circ g$.

1. Teorema : *Se cumple que* $\operatorname{Spec} A = Esp\, A(\Sigma)/\sim$. *Sea $f\colon A \to B$ un morfismo de k-álgebras. el morfismo inducido $f^*\colon Esp\, B(\Sigma) \to Esp\, A(\Sigma)$ aplica clases de equivalencia dentro de clases de equivalencia y vía la igualdad anterior el morfismo*

$$\operatorname{Spec} B = Esp\, B(\Sigma)/\sim \xrightarrow{\overline{f^*}} Esp\, A(\Sigma)/\sim = \operatorname{Spec} A$$

es el morfismo natural $f^*\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$.

Demostración. Consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} Esp\, A(\Sigma) & \xrightarrow{\pi} & \operatorname{Spec} A \\ g & \mapsto & \operatorname{Ker} g \end{array}$$

Observemos que π es epiyectiva: En efecto, dado $x \in \operatorname{Spec} A$, consideremos la composición, g, del morfismo $A \to A_x/\mathfrak{p}_x A_x$ con cualquier inclusión $A_x/\mathfrak{p}_x A_x \hookrightarrow \Sigma$. Es obvio, que $\operatorname{Ker} g = \mathfrak{p}_x$, es decir, $\pi(g) = \mathfrak{p}_x$.

Dado un automorfismo $\phi\colon \Sigma \to \Sigma$ y $g \in Esp\, A(\Sigma)$, se cumple que $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker}(\phi \circ g)$. Por tanto, tenemos una aplicación epiyectiva natural

$$\begin{array}{rcl} Esp\, A(\Sigma)/\sim & \xrightarrow{\bar\pi} & \operatorname{Spec} A \\ \bar g & \mapsto & \operatorname{Ker} g \end{array}$$

que tenemos que probar que es inyectiva. Sean $g, g' \in Esp\, A(\Sigma)$ tales que $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} g' = \mathfrak{p}_x$. Los morfismos g y g' factorizan vía el morfismo natural $A \to (A_x/\mathfrak{p}_x A_x) = K$. Tenemos que probar que dos morfismos de k-álgebras $g, g'\colon K \to \Sigma$ difieren en un automorfismo de k-álgebras de Σ, lo cual es un resultado de la teoría de Galois.

Por último, tenemos el diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
Esp\, B(\Sigma)/\sim \arrow[r, "\overline{f^*}"] \arrow[d, equal] & Esp\, A(\Sigma)/\sim \arrow[d, equal] \\
\operatorname{Spec} B \arrow[r, dashed, "f^*"] & \operatorname{Spec} A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\bar{g} \arrow[r, mapsto, "\overline{f^*}"] \arrow[d, mapsto] & \overline{g\circ f} \arrow[d, mapsto] \\
\operatorname{Ker} g \arrow[r, mapsto, dashed, "f^*"] & f^{-1}(\operatorname{Ker} g) = \operatorname{Ker}(g\circ f)
\end{tikzcd}
$$

□

Cuando se considera un sistema de ecuaciones algebraicas sobre los números reales

$$
\begin{array}{l}
p_1(x_1,\ldots,x_n)=0\\
\cdots\\
p_r(x_1,\ldots,x_n)=0
\end{array}
$$

es obvio que dada una solución compleja su conjugada también lo es. En general, dada una solución sobre un cuerpo algebraicamente cerrado la transformada por un automorfismo del cuerpo también es solución. Una vez que se tiene un cuerpo algebraicamente cerrado lo “suficientemente grande” se tiene que el conjunto de todas las soluciones del sistema sobre tal cuerpo, módulo transformaciones por automorfismos del cuerpo, coincide exactamente con $\operatorname{Spec}\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]/(p_1,\ldots,p_r)$.

2. Ejercicio : Hacer el cálculo de $\operatorname{Spec} A/I, \operatorname{Spec} A_S$, vía el teorema anterior y 1.4.5, 1.4.6.

3. Ejemplo : Probemos la fórmula de la fibra. Supondremos que Σ contiene los cuerpos residuales de todos los puntos del espectro de las k-algebras consideradas. Dada una k-álgebra C denotemos $\pi\colon Esp\, C(\Sigma)\to Esp\, C(\Sigma)/\sim = \operatorname{Spec} C$ el morfismo de paso al cociente.

Dado $p\in\operatorname{Spec} A$, entonces $\pi^{-1}(p) = Esp\, k(p)(\Sigma)\subseteq Esp\, A(\Sigma)$. Sea $f\colon A\to B$ un morfismo de anillos. Consideremos el diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
Esp\, B(\Sigma) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\pi"] & Esp\, A(\Sigma) \arrow[d, "\pi"] \\
\operatorname{Spec} B \arrow[r, "f^*"] & \operatorname{Spec} A
\end{tikzcd}
$$

Entonces,

$$f^{*-1}(p) = \pi(f^{*-1}(\pi^{-1}(p))) = \pi(f^{*-1}(Esp\, k(p)(\Sigma))) = \pi(Esp\, B_p/\mathfrak{p}_pB_p(\Sigma)) = \operatorname{Spec} B_p/\mathfrak{p}_pB_p$$

1.8. Problemas

1. Identificar categorías usadas en los cursos de la licenciatura.

2. Expresar como funtores las siguientes construcciones:

   a) La que asigna a cada espacio vectorial E su espacio dual E^*.

   b) La que asigna a cada A-módulo la localización por un sistema multiplicativo S.

   c) El producto tensorial $M\otimes_A N$ de A-módulos.

   d) El producto tensorial $A\otimes_k B$ de k-álgebras.

e) La completación $\widehat{E}$ de un espacio normado E.

f) El anillo $\mathcal{C}(X)$ de las funciones reales continuas sobre un espacio topológico X.

g) El anillo $\mathcal{C}^\infty(X)$ de las funciones diferenciables sobre una variedad diferenciable X.

3. Comprender los siguientes morfismos e isomorfismos como morfismos de funtores:

    a) El morfismo $\mu\colon A\otimes_k A\to A$, $\mu(a\otimes b)=ab$, donde A es una k-álgebra.

    b) El isomorfismo natural $M\otimes_A A_S = M_S$.

    c) El isomorfismo de un espacio vectorial de dimensión finita E con su bidual E^{**}.

    d) $\operatorname{Hom}_A(A,M)=M$.

    e) $(E/V)^* = V^o$.

4. Sea $\mathcal{C}_{Vect}$ la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo k con los isomorfismos, y sea $F\colon \mathcal{C}_{Vect}\rightsquigarrow \mathcal{C}_{Vect}$ el funtor covariante $F(E)=E^*$, $F(\tau)=(\tau^{-1})^*=(\tau^*)^{-1}$. Demostrar que F no es isomorfo al funtor identidad cuando k tiene más de tres elementos.

5. Sea $\mathcal{C}_{Anillos}$ la categoría de anillos. Probar que el anillo de polinomios $\mathbb{Z}[x]$ es un representante del funtor $F(A)=A$, y que el anillo de polinomios $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$ es un representante del funtor $F(A)=A^n$.

6. Sea $\mathcal{C}_{k-alg}$ la categoría de k-álgebras. Probar que $k[x]$ es un representante del funtor $F(A)=A$, y que $k[x_1,\dots,x_n]$ es un representante del funtor $F(A)=A^n$.

7. Sea $\mathcal{C}_{Mod}$ la categoría de A-módulos y sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de A-módulos. Probar que la suma directa $\oplus_i M_i$ es un representante del funtor

$$F(N)=\prod_{i\in I}\operatorname{Hom}_A(M_i,N)$$

y que el producto directo $\prod_i M_i$ es un representante del funtor

$$F(N)=\prod_{i\in I}\operatorname{Hom}_A(N,M_i)\ .$$

8. Expresar como representación de cierto funtor la propiedad universal de:

    a) el grupo cociente G/H, el anillo cociente A/I y el módulo cociente M/N,

    b) el anillo de fracciones A_S,

    c) la localización M_S de un módulo,

    d) el cambio de base M_B de un módulo,

    e) el cambio de base A_L de una k-álgebra,

    f) y la completación $\widehat{E}$ de un espacio normado E.

9. Sea $\mathcal{C}_{Anillos}$ la categoría de anillos y sea 1 un conjunto con un único elemento. Determinar si el funtor *covariante* constante $F\colon \mathcal{C}_{Anillos}\rightsquigarrow \mathcal{C}_{Conj}$, $F(A)=1$, es representable. Análogamente cuando $\mathcal{C}_{Anillos}$ es la categoría de cuerpos (resp. cuerpos de característica nula, cuerpos de característica 2).

10. Sea $\mathcal{C}_{Anillos}$ la categoría de anillos y sea 1 un conjunto con un único elemento. Determinar si el funtor *contravariante* constante $F\colon \mathcal{C}_{Anillos} \rightsquigarrow \mathcal{C}_{Conj}$, $F(A) = 1$, es representable. Análogamente cuando $\mathcal{C}_{Cuerpos}$ es la categoría de cuerpos (resp. cuerpos de característica nula, cuerpos de característica 2).

11. Sea $\mathcal{C}_{Mod}$ la categoría de A-módulos. Determinar si el funtor covariante $F\colon \mathcal{C}_{Mod} \rightsquigarrow \mathcal{C}_{Conj}$, $F(M) = M$, es representable. Análogamente para el funtor $F(M) = M^n$, donde $n > 1$ es un número natural prefijado.

12. Sea $\mathcal{C}_{Top}$ la categoría de espacios topológicos. Determinar si el funtor $F\colon \mathcal{C}_{Top} \rightsquigarrow \mathcal{C}_{Conj}$, $F(X) = X$, es representable. Análogamente para el funtor $F(X) = X^n$, donde $n > 1$ es un número natural prefijado.

13. Determinar las aplicaciones naturales o universales $G \to G$ que se pueden definir en los grupos. Análogamente en los anillos, en las k-álgebras y en los espacios topológicos.

14. Determinar las operaciones naturales o universales $M \times M \to M$ que se pueden definir en los A-módulos. Análogamente en los anillos, las k-álgebras y los espacios topológicos.

15. Determinar los morfismos de anillo naturales o universales $A \to A$ que se pueden definir en los anillos. Análogamente en los grupos, los grupos abelianos, los A-módulos y las k-álgebras (según la característica del cuerpo k).

16. Determinar las aplicaciones continuas naturales o universales $X \to X$ que se pueden definir en los espacios topológicos.

17. Denotemos $\mathbb{A}^{\cdot}_n = Esp\, k[x_1, \dots, x_n]$. Dado el ideal $(y^2 - x^3) \subset \mathbb{C}[x, y]$, determinar el morfismo inducido entre los anillos de funciones por los siguientes morfismos naturales:

$$\phi\colon \mathbb{A}^{\cdot}_1 \longrightarrow Esp\,(y^2 - x^3 = 0), \qquad \phi(a) = (a^3, a^2)$$
$$\phi\colon Esp\,(y^2 - x^3 = 0) \longrightarrow \mathbb{A}^{\cdot}_1, \qquad \phi(a, b) = a^2 - b^2$$
$$\phi\colon Esp\,(y^2 - x^3 = 0) \longrightarrow Esp\,(y^2 - x^3 = 0), \qquad \phi(a, b) = (a^2, b^2)$$

¿Existe algún morfismo natural $\phi\colon Esp\,(y^2 - x^3 = 0) \longrightarrow \mathbb{A}^{\cdot}_1$ tal que $\phi(\alpha^3, \alpha^2) = \alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$?

18. Los morfismos naturales $\mathbb{A}^{\cdot}_1 \longrightarrow \mathbb{A}^{\cdot}_2$, ¿se corresponden con los polinomios en dos variables o con las parejas de polinomios en una variable?

19. Determinar el morfismo inducido entre los anillos de funciones por el morfismo natural $\phi\colon \mathbb{A}^{\cdot}_2 \longrightarrow \mathbb{A}^{\cdot}_2$, $\phi(a, b) = (a + b, a + b)$, y hallar el núcleo de tal morfismo de anillos.

20. Demostrar que una función $f \in k[x_1, \dots, x_n]/I$ es invertible si y sólo si, entendida como morfismo de funtores $f\colon Esp\, k[x_1, \dots, x_n]/I \to \mathbb{A}^{\cdot}_1$, no se anula en ningún punto; y que f es nula si y sólo si se anula en todos los puntos.

21. Demostrar que si $p(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ se anula en $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y - x^2 = 0\}$, entonces $p(x, y)$ es múltiplo del polinomio $y - x^2$. Igualmente para $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon xy = 1\}$ y el polinomio $xy - 1$.

22. ¿Es cierto que $Esp(x^2 - 1 = 0)(A)$ tiene exactamente dos elementos para toda $\mathbb{R}$-álgebra A?

23. Definir un funtor contravariante F de la categoría de conjuntos en sí misma tal que para cada conjunto X se tenga que $F(X)$ es el conjunto de las partes de X. ¿Es representable tal funtor F?. Análogamente para un funtor covariante.

24. Demostrar la existencia de isomorfismos de álgebras (y dar el significado geométrico de cada uno de ellos):

    a) $k[x_1, \dots, x_n]/(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \simeq k$.

    b) $k[x, y]/(y - x^2) \simeq k[t]$.

    c) $k[x, y]/(xy - 1) \simeq k[t, t^{-1}]$.

    d) $k[x, y]/(y^2 - 1) \simeq k[t] \oplus k[t]$.

    e) $\mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1, y - x) \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

    f) $\mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1, y - 2) \simeq \mathbb{C}$.

    g) $\mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1, y - 2) \simeq \mathbb{R}[t]/(t^2)$.

25. *Teorema de los restos chino*: Sean I, J dos ideales de un anillo A. Si $I + J = A$, entonces $I \cap J = IJ$ y $A/IJ = (A/I) \oplus (A/J)$.

26. ¿En cuántos puntos se cortan las curvas $y = x^4$ e $y = -x^4$ del plano afín real?

27. ¿En cuántos puntos corta la parábola $y = x^2$ a la circunferencia $x^2 + y^2 = y$?

28. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas:

    a) La unión de la recta $x = 0$ con la recta $y = 0$ es el par de rectas $xy = 0$.

    b) La intersección de la parábola $y = x^2$ con la recta $y = 0$ es el punto $x = y = 0$.

    c) La intersección de la parábola $y = x^2$ con la recta $x = 0$ es el punto $x = y = 0$.

    d) La intersección del par de rectas $xy = 0$ con el par de rectas $y(x - y) = 0$ es la recta $y = 0$.

    e) La intersección de dos rectas planas paralelas (no coincidentes) siempre es vacía.

    f) La intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ con la recta $x = 2$ es vacía.

    g) La intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ con la recta $x = 0$ es la unión del punto $x = 0$, $y = 1$ con el punto $x = 0$, $y = -1$.

    h) La intersección del par de rectas $xy = 0$ con el par de rectas $y(x + y - 1) = 0$ es la unión de la recta $y = 0$ con el punto $x = 0$, $y = 1$. (*Indicación:* Probar que $(xy, x(x + y - 1)) = y(x, y - 1))$.

    i) La intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ con la recta doble $x^2 = 0$ coincide con su intersección con el par de rectas paralelas $y^2 = 1$.

    j) La intersección del par de planos $xz = 0$ con el par de planos $xy = 0$ es la unión del plano $x = 0$ con la recta $z = y = 0$.

29. Sea A un anillo reducido (i.e., todo elemento nilpotente es nulo). Probar que Spec A es irreducible si y sólo si A es íntegro. ¿Es cierto el resultado si se elimina la hipótesis de que A sea reducido?

30. Sea $\mathfrak{a}$ un ideal de un anillo A. Probar que la condición necesaria y suficiente para que $\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a})_0$ coincida con $\operatorname{Spec} A$ es que el ideal $\mathfrak{a}$ esté generado por elementos nilpotentes. Concluir que $\operatorname{Spec} A$ es irreducible precisamente cuando el cociente de A por su radical sea un anillo íntegro.

31. Sea A un anillo y $X = \operatorname{Spec} A$. Probar que un punto $x \in X$ es denso precisamente cuando su ideal primo $\mathfrak{p}_x$ coincide con el radical $\mathrm{r}(A)$ de A. Concluir que X tiene un punto denso si y sólo si el radical $\mathrm{r}(A)$ es un ideal primo.

32. Probar que la condición necesaria y suficiente para que un punto x' esté en el cierre de un punto x es que x esté en todos los entornos de x'.

33. Sea A un anillo y $f, g \in A$. Probar que $U_f \subseteq U_g \Leftrightarrow g$ divide a alguna potencia de f.

34. Hallar el espectro, determinar sus componentes irreducibles, sus componentes conexas y calcular la dimensión de los siguientes anillos: $\mathbb{R}[x]/(x^4 + x^2)$, $\mathbb{R}[x]/(x^4 + x^2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, $\mathbb{C}[x]/(x^4 + x^2) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y]/(y^2+1)$, $\mathbb{C}[x,y]/(x^2+y^2)$, $\mathbb{C}[x,x^{-1}]$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$, $\mathbb{C}[x,y]/(y^2+x, y^2-xy+x)$ y $\mathbb{C}[x,y]/(xy+2, x^3-x+y^2x)$.

35. Demostrar que todo elemento de un ideal primo minimal es un divisor de cero. (*Indicación*: Localizar en el punto definido por el ideal primo).

36. Si un morfismo de anillos $A \to B$ es epiyectivo y $\mathfrak{a}$ es su núcleo, probar que la correspondiente aplicación continua $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ es un homeomorfismo de $\operatorname{Spec} B$ con $(\mathfrak{a})_0$.

37. Si un morfismo de anillos $j\colon A \to B$ es inyectivo, probar que la correspondiente aplicación continua $\phi\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ tiene imagen densa.

    (*Indicación*: Si un cerrado $(\mathfrak{a})_0$ contiene a la imagen de ϕ, entonces $\mathfrak{a}B \subseteq \operatorname{rad} B$ y por tanto $\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{rad} A$).

38. Sea $\phi\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ la aplicación continua inducida por un morfismo de anillos $A \to B$. Probar que el cierre de la imagen de ϕ es $(\operatorname{Ker} j)_0$.

    En general, si $\mathfrak{b}$ es un ideal de B, el cierre de $\phi(\mathfrak{b})_0$ coincide con $(\mathfrak{b} \cap A)_0$.

39. Sean $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ dos ideales de un anillo A. Probar que $(\mathfrak{a})_0 \subseteq (\mathfrak{b})_0$ si y sólo si $\mathrm{r}(\mathfrak{b}) \subseteq \mathrm{r}(\mathfrak{a})$.

40. Probar, usando el lema de Zorn, que todo espacio topológico es unión de sus componentes irreducibles. Concluir que todo ideal primo de un anillo A contiene algún ideal primo minimal de A.

41. Calcular $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x,y]/(p,q)$ cuando $p(x,y)$ y $q(x,y)$ tengan un factor irreducible común. Determinar sus componentes irreducibles y sus componentes conexas.

42. Hallar la fibra de todos los puntos en los siguientes morfismos entre variedades algebraicas complejas:

    a) La parametrización $x = t^2$, $y = t^3$ de la curva $y^2 = x^3$.
    b) La parametrización $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$ de la curva $y^2 = x^3 + x^2$.
    c) La proyección $\pi\colon \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}_1$, $\pi(x,y) = xy$.

43. Calcular el espectro del anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,]$ cuando $d = 2, 3, 5, -1, -2, -3$. Calcular el espectro de $\mathbb{Z}[\omega]$, donde ω denota una raíz cúbica primitiva de la unidad.

    Calcular las fibras del morfismo natural $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\omega] \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\sqrt{-3}\,]$.

44. Sean I, J ideales de un anillo A. Probar que el morfismo natural

$$A/(I \cap J) \longrightarrow (A/I) \times_{A/(I+J)} (A/J)$$

es un isomorfismo, donde

$$(A/I) \times_{A/(I+J)} (A/J) := \{(\bar{a}, \bar{b}) \in (A/I) \times (A/J) \colon \ \bar{a} = \bar{b} \text{ en } A/(I+J)\}$$

Sean $Y_1,\ Y_2$ dos subvariedades algebraicas cerradas de una variedad algebraica afín X, definidas por sendos ideales I_1, I_2 del anillo de funciones algebraicas $\mathcal{O}(X)$. Dadas funciones algebraicas f_1, f_2 sobre Y_1 e Y_2 respectivamente, que coincidan en $Y_1 \cap Y_2$ (la subvariedad definida por el ideal $I_1 + I_2$), probar la existencia de una única función algebraica sobre $Y_1 \cup Y_2$ (la subvariedad definida por el ideal $I_1 \cap I_2$) que coincide con f_1 en Y_1 y con f_2 en Y_2.

45. Si $\operatorname{Spec} A = U \coprod V$, donde U y V son abiertos, probar que U y V son abiertos básicos de $\operatorname{Spec} A$.

Indicación: Si $U = (I)_0$ y $V = (J)_0$, probar que $I + J = A$; luego $1 = f + h$, donde $f \in I,\ h \in J$. Concluir que $U = U_h$ y $V = U_f$.

46. Cada descomposición $A = B_1 \oplus B_2$ de un anillo A en suma directa, induce una descomposición de su espectro en unión disjunta de dos abiertos:

$$\operatorname{Spec} A = (\operatorname{Spec} B_1) \coprod (\operatorname{Spec} B_2)$$

Recíprocamente, cada descomposición $\operatorname{Spec} A = U \coprod V$ del espectro en unión disjunta de dos abiertos induce una descomposición de A en suma directa de dos anillos.

Indicación: Si $U = U_f$ y $V = U_h$, probar que $A = A_f \oplus A_h$. O bien, probar que fh es nilpotente, así que f y h pueden elegirse de modo que $fh = 0$. Concluir que el morfismo natural $A \to (A/fA) \oplus (A/hA)$ también es un isomorfismo (Teorema chino de los restos).

Probar también que $A_h = A/fA$ y $A_f = A/hA$.

47. Sea I un ideal de un anillo A y sea x un punto de $\operatorname{Spec} A$. Probar que las siguientes condiciones son equivalentes:

   a) $(A/I)_x = 0$
   b) $I_x = A_x$
   c) Alguna función $f \in I$ no se anula en x.
   d) El punto x está en el abierto complementario de $(I)_0$.

48. Sea I un ideal de un anillo A y sea x un punto de $\operatorname{Spec} A$. Probar que las siguientes condiciones son equivalentes:

   a) $(A/I)_x = A_x$
   b) $I_x = 0$
   c) Cada función del ideal I se anula en algún entorno de x. (Si además I es un ideal finito generado, todas las funciones de I se anulan en algún entorno de x).

49. La condición de pertenecer a un submódulo dado es local. Con precisión, sea N un submódulo de un A-módulo M y sea $m \in M$. Si $m_x \in N_x$ para todo $x \in \operatorname{Spec} A$, demostrar que $m \in N$.

50. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales diofánticas tenga alguna solución entera es que, para cada número primo p, admita alguna solución racional con denominadores que no sean múltiplos de p.

51. **Álgebras de Boole:** Un álgebra de Boole es un conjunto A dotado de dos operaciones $\wedge$, $\vee$ que verifican las propiedades del cálculo proposicional:

    a) Ambas operaciones son asociativas, conmutativas, y admiten neutro:
    $$a \wedge 0 = a \quad , \quad a \vee 1 = A$$
    b) Propiedad distributiva: $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.
    c) Idempotencia: $a \vee a = a$.
    d) Absorción: $a \wedge 1 = 1$.
    e) Negación: Si $a \in A$, existe $\bar{a} \in A$ tal que $\bar{a} \wedge a = 1$ y $\bar{a} \vee a = 0$.

    El ejemplo fundamental de álgebra de Boole lo proporcionan el álgebra $\mathcal{P}(X)$ de las partes de un conjunto X, donde $\wedge$ es la intersección y $\vee$ es la unión, de modo que $0 = X$, $1 = \emptyset$ y $\bar{a}$ es el complementario de a . También los enunciados de cualquier teoría lógica formalizada (que incluya los conectores "no", "y", "o") siempre que se identifiquen los enunciados equivalentes (i.e., identificamos α y β cuando $\alpha \Leftrightarrow \beta$ sea un teorema de tal teoría).

    En las álgebras de Boole se definen la implicación $\Rightarrow$ y la equivalencia $\Leftrightarrow$ del siguiente modo:
    $$a \Rightarrow b \ := \ \bar{a} \vee b \qquad , \qquad a \Leftrightarrow b \ := \ (\bar{a} \vee b) \wedge (a \vee \bar{b})$$

    a) Probar que en todo álgebra de Boole $(A; \vee, \wedge)$, las operaciones
    $$a + b \ := \ a \Leftrightarrow b \qquad , \qquad a \cdot b \ := \ a \vee b$$
    definen una estructura de anillo conmutativo con unidad en el que todo elemento es idempotente: $a^2 = a$. Tales anillos reciben el nombre de **anillos de Boole**. (Los anillos de Boole son de característica 2 porque $2^2 = 2$).
    b) Recíprocamente, si $(A; +, \cdot)$ es un anillo de Boole, obtenemos en A una estructura de álgebra de Boole (donde la negación es $\bar{a} = 1 + a$) sin más que definir
    $$a \wedge b \ := \ a + b + ab \qquad , \qquad a \vee b \ := \ a \cdot b$$
    c) Todo anillo de Boole íntegro es el cuerpo $\mathbb{F}_2$, porque la condición $a(a-1) = a^2 - a = 0$.
    d) Todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de un anillo de Boole A es maximal y de cuerpo residual $A/\mathfrak{p} = \mathbb{F}_2$.
    e) Los puntos $x \in X := \operatorname{Spec} A$ del espectro de un anillo de Boole A se corresponden con los morfismos $v_x \colon A \to \mathbb{F}_2$, (que son las valoraciones o interpretaciones coherentes de A como familia de proposiciones verdaderas o falsas).
    f) Cada elemento $f \in A$ define una función $f \colon X \to \mathbb{F}_2$, sin más que poner $f(x) := v_x(f)$, que se anula precisamente en $(f)_0$. Si en el cuerpo $\mathbb{F}_2$ se considera la topología discreta, probar que estas funciones son continuas.
    g) Toda función continua $X \to \mathbb{F}_2$ está definida por algún elemento de A. (*Indicación:* Dar tal función equivale a descomponer el espectro como unión de dos abiertos disjuntos, $X = U \sqcup V$, de modo que $U = U_f$ para algún $f \in A$.

h) Todo elemento nilpotente de un anillo de Boole A es nulo, así que cada elemento de A está totalmente determinado por la función que define sobre el espectro. Luego cada anillo de Boole A es isomorfo al anillo de las funciones continuas sobre su espectro X con valores en $\mathbb{F}_2$.

i) Todo álgebra de Boole A es isomorfa a una subálgebra de partes de su espectro X (los cerrados abiertos de X).

j) Cada ideal I de un anillo de Boole A está formado por todas las funciones continuas $X \to \mathbb{F}_2$ que se anulan en el cerrado $(I)_0$. Es decir, fijada una familia de axiomas $B \subset A$, el ideal que genera B está formado por las funciones $f \in A$ que se anulan en el cerrado $\bigcap_{b\in B}(b)_0$; i.e., por los enunciados que son verdaderos en cualquier interpretación coherente que verifique los axiomas fijados:

$$\begin{aligned} v(f) = 0 \text{ siempre que } v(b) = 0 \text{ para todo } b \in B \\ f \text{ es verdadero siempre que lo sea todo } b \in B \end{aligned}$$

En principio eso no significa que el enunciado f pueda derivarse de los axiomas fijados y tautologías (el 0), usando sólo el “Modus Ponens”; enunciados que forman el menor subconjunto B' que, incluyendo a B y al 0, tenga la siguiente propiedad:

$$\text{Si } a \in B' \text{ y } (a \Rightarrow b) \in B' \text{ , entonces } b \in B'$$

Probar que B' está contenido en el ideal de A generado por B, pues los ideales tienen la propiedad anterior, ya que $(a \Leftrightarrow b) = a + b$ y $b = a + (a + b)$. Probar que B' coincide con el ideal generado por B; es decir, B' es un ideal:

Si $a \in A$ y $b \in B'$, como $b \Rightarrow (a \vee b)$ es nulo, tenemos que $ab = (a \vee b) \in B'$.

Si $a, b \in B'$, $a \Rightarrow (b \Rightarrow (a \Leftrightarrow b))$ es nulo, $b \Rightarrow (a \Leftrightarrow b) \in B'$ y $a + b = (a \Leftrightarrow b) \in B'$.

En resumen, si un enunciado es cierto en todas las interpretaciones coherentes que satisfagan la familia de axiomas B, entonces puede deducirse en un número finito pasos usando tautologías y el “Modus Ponens”.

Capítulo 2

Variedades algebraicas

2.1. Introducción

Una definición de Matemáticas podría ser: "La Matemática estudia el concepto de espacio, es Geometría". Desde este punto de vista, la Topología es el estudio de los espacios topológicos, de las variedades topológicas, la Geometría Diferencial es el estudio de las variedades diferenciales, la asignatura de Variable Compleja el estudio de las variedades analíticas y el Álgebra el estudio de las variedades algebraicas. El análisis del espacio se funda en las funciones del espacio considerado. Así el fundamento de la Topología es el anillo de funciones continuas, de la Geometría Diferencial el anillo de las funciones infinito diferenciables, el de la Variable Compleja el anillo de funciones analíticas o conformes y el del Álgebra el anillo de funciones algebraicas.

Una definición del Álgebra podría ser: "El estudio de los espacios definidos por sistemas de ecuaciones algebraicas". Así pues el Álgebra estudia los ideales de los anillos de polinomios. En primer lugar nos planteamos si los ideales de los anillos de polinomios son finito generados. La finitud siempre es una propiedad deseada (incluso exigida). Los anillos cuyos ideales son finito generados se denominan anillos noetherianos. El teorema de la base de Hilbert dice que los anillos de polinomios son noetherianos. Luego los anillos que estudia la Geometría Algebraica son noetherianos.

Llamemos variedad algebraica (de $\mathbb{A}^n$) al conjunto de soluciones sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, por ejemplo $\mathbb{C}$, de un sistema de ecuaciones algebraicas, con n variables. Un resultado inmediato de la teoría de variedades algebraicas es que una variedad V es irreducible, es decir, no es unión propia de dos variedades algebraicas, si y sólo si el ideal de todas las funciones que se anulan en V es un ideal primo. En general, toda variedad algebraica V es unión de un número finito de variedades algebraicas irreducibles. En términos de ideales, todo ideal radical es intersección de un número finito de ideales primos.

El teorema fuerte de los ceros de Hilbert dice que hay una correspondencia biunívoca, "salvo nilpotentes", entre los ideales de $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ y las subvariedades de $\mathbb{A}^n$.

Una vez que hayamos profundizado en el concepto de variedad algebraica surgirán las preguntas: ¿Cuántas variedades algebraicas hay? ¿Cómo distinguir dos variedades algebraicas? Nos planteamos la clasificación de las variedades algebraicas.

Un invariante obvio de las variedades algebraicas es la dimensión. Se dice que una variedad algebraica es de dimensión n si existe una cadena (de inclusiones estrictas) de subvariedades irreducibles $\emptyset = C_0 \subset C_1 \subset \cdots \subset C_n$ de longitud n y no existe ninguna otra de longitud mayor. Probaremos que la dimensión de una variedad algebraica es m si existe una proyección de fibras finitas y no vacías de la variedad en un espacio afín $\mathbb{A}^m(\mathbb{C})$. Veremos que el concepto de dimensión en variedades algebraicas irreducibles es local, y aún más, que todas las cadenas irrefinables de subvariedades irreducibles tienen la misma longitud. Por último, veremos que las hipersuperficies $f = 0$ de una variedad algebraica irreducible de dimensión m son de dimensión $m-1$ y que todo punto de la variedad es (localmente) la solución de un sistema de m ecuaciones algebraicas y no menos. Todos estos resultados serán expresados en términos de los anillos de funciones algebraicas de la variedad y sus ideales primos.

El teorema central, que usaremos para la demostración del teorema de los ceros de Hilbert y el desarrollo de la teoría de la dimensión, será el lema de Noether, que afirma que toda variedad algebraica se proyecta con fibras finitas en un espacio afín. Esto nos llevará a estudiar con mayor profundidad los morfismos finitos.

2.2. Anillos y módulos noetherianos

La introducción de los módulos la justificábamos con diversas razones. La primera que dábamos es que los ideales son módulos. Decíamos además que las operaciones básicas como producto tensorial, cocientes etc., se realizan de un modo mucho más flexible y claro con los módulos, y que muchos de los objetos usuales en Matemáticas tienen estructura de módulo.

En Geometría Algebraica los espacios estudiados son objetos definidos por un número finito de ecuaciones (la finitud es una condición natural). Es decir, los ideales que se consideran son los generados por un número finito de funciones. Los anillos cuyos ideales son finito generados se denominan noetherianos. Como veremos los anillos que usualmente aparecen en Geometría Algebraica y la Aritmética son noetherianos, de forma que estos anillos proporcionan el marco natural para desarrollar su estudio.

De nuevo, será natural comenzar estudiando los módulos finito generados, cuyos submódulos sean finito generados, en vez de limitarnos simplemente a los anillos cuyos ideales son finito generados.

1. Definición : [1] Un A-módulo M se dice que es un A-módulo noetheriano si todo submódulo suyo (propio o no) es finito generado.

2. Definición : [2] Un A-módulo M se dice que es noetheriano si toda cadena ascendente de submódulos de M

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots M_n \subseteq \cdots$$

estabiliza, es decir existe $m >> 0$ de modo que $M_m = M_{m+1} = \cdots$.

3. Proposición : *Las dos definiciones anteriores son equivalentes.*

Demostración. $\mathbf{def}^1 \Rightarrow \mathbf{def}^2$: Sea una cadena ascendente de submódulos de M, $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_n \subseteq \cdots$.

Sea $M' = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} M_i \subseteq M$. Como M' es un submódulo de M, es finito generado. Escribamos $M' = \langle m_1, \dots, m_r \rangle$, con $m_j \in M_{i_j}$. Sea m el máximo de todos los i_j. Entonces trivialmente se obtiene que $M' = M_m$, luego $M_m = M_{m+1} = \cdots$.

$\mathbf{def}^2 \Rightarrow \mathbf{def}^1$: Sea $M' \subseteq M$. Sea $m_1 \in M'$ y consideremos el submódulo de M, $M_1 = \langle m_1 \rangle$. Si $M_1 \neq M'$, sea $m_2 \in M' - M_1$. Consideremos el submódulo de M, $M_2 = \langle m_1, m_2 \rangle$. Repitiendo el proceso, obtenemos una cadena de inclusiones estrictas

$$\langle m_1 \rangle \subset \langle m_1, m_2 \rangle \subset \cdots$$

que ha de ser finita, porque por la segunda definición toda cadena estabiliza. Por tanto, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $\langle m_1, \dots, m_m \rangle = M'$.

□

4. Ejemplo : Los k-espacios vectoriales de dimensión finita son k-módulos noetherianos.

5. Proposición : *Todo submódulo de un módulo noetheriano es noetheriano.*

6. Proposición : *Todo cociente de un módulo noetheriano es noetheriano.*

Demostración. Sea M noetheriano y $\pi\colon M \to M/N$ un cociente. Dado un submódulo $\bar{M} \subset M/N$, tenemos que $\pi^{-1}\bar{M} = \langle m_1, \dots, m_r\rangle$. Por tanto, $\bar{M} = \langle \pi(m_1), \dots, \pi(m_r)\rangle$. □

7. Proposición : *Sea*

$$0 \to M_1 \to M_2 \xrightarrow{\pi} M_3 \to 0$$

una sucesión exacta de A-módulos. Se verifica que M_2 es noetheriano $\Leftrightarrow$ M_1 y M_3 son noetherianos.

Demostración. $\Rightarrow$) Esto es lo que afirman las dos proposiciones anteriores.

$\Leftarrow$) Sea $M' \subseteq M_2$. El diagrama siguiente es conmutativo y las filas son exactas:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' \cap M_1 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & \pi(M') & \longrightarrow & 0 \\ & & \cap & & \cap & & \cap & & \\ 0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M_2 & \xrightarrow[\pi]{} & M_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Tenemos que $M' \cap M_1 = \langle m_1, \dots, m_r\rangle$ y que $\pi(M') = \langle \pi(n_1), \dots, \pi(n_s)\rangle$. Por tanto, tenemos la igualdad $M' = \langle m_1, \dots, m_r, n_1, \dots, n_s\rangle$.

□

8. Ejercicio : Probar que M y M' son noetherianos si y sólo si $M \oplus M'$ es noetheriano.

9. Definición : Se dice que un anillo A es noetheriano si como A-módulo es noetheriano, es decir si todo ideal es finito generado, o equivalentemente, si toda cadena ascendente de ideales estabiliza.

10. Ejemplo : Los cuerpos, los anillos de ideales principales, como $\mathbb{Z}$, $k[x]$, son noetherianos.

Un ejemplo de anillo no noetheriano, es el anillo de funciones diferenciales en la recta real:

Sea I_n el ideal de las funciones que se anulan en $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que $I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_n \subset \cdots$ es una cadena ascendente estricta de ideales en el anillo, luego no estabiliza. Por tanto, el anillo no es noetheriano.

11. Corolario : *Si A es noetheriano entonces todo A-módulo finito generado es noetheriano.*

Demostración. Si A es noetheriano A^n es un A-módulo noetheriano, por el ejercicio que sigue a la proposición 2.2.7. Ahora bien, como todo módulo finito generado es cociente de un libre finito generado, concluimos que los módulos finitos son noetherianos.

□

Por tanto, sobre los dominios de ideales principales todo módulo finito generado es noetheriano.

12. Ejercicio : Si A es noetheriano A_S es noetheriano

13. Ejercicio : Demostrar que $\mathbb{Q}[x, x_1, \dots, x_n, \dots]/((x-n)x_n)_{\{n\in\mathbb{N}\}}$ es localmente noetheriano pero no es noetheriano.

14. Proposición : *Si A es un anillo noetheriano, entonces* $\operatorname{Spec} A$ *es un espacio topológico noetheriano. (Un espacio topológico se dice que es noetheriano si toda cadena descendente de cerrados estabiliza).*

Demostración. Sea $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \cdots \supseteq C_n \supseteq \cdots$ una cadena descendente de cerrados. Sean I_i los ideales de funciones que se anulan en C_i. Luego $(I_i)_0 = C_i$ y tenemos la cadena

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots$$

Cadena que estabiliza por ser A noetheriano. Es decir, existe $m \in \mathbb{N}$ de modo que $I_m = I_{m+1} = \cdots$. Luego, $C_m = C_{m+1} = \cdots$.

□

15. Proposición : *Se cumple que:*

1. *Todo espacio topológico noetheriano es compacto.*
2. *Todo abierto de un espacio topológico noetheriano es noetheriano.*
3. *Llamemos cerrado irreducible a todo cerrado que no es unión de dos cerrados propios. Todo espacio topológico noetheriano es unión de un número finito de cerrados irreducibles.*

Demostración. 1. Sea $F = \{C_i\}_{i \in I}$ un conjunto de cerrados del espacio topológico noetheriano X, tal que $\cup_i C_i = \emptyset$. Denotemos por C_1 a cualquiera de los cerrados de F. Si $C_1 \neq \emptyset$, sea C_2 cualquier cerrado de la familia F que no contenga a C_1 (existe). Si $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, sea C_3 cualquier cerrado de la familia que no contenga a $C_1 \cap C_2$. Así sucesivamente vamos construyendo una cadena de inclusiones estrictas

$$C_1 \supset C_1 \cap C_2 \supset C_1 \cap C_2 \cap C_3 \supset \cdots$$

Por la noetherianidad de X este proceso ha de terminar y lo hará cuando $C_1 \cap \cdots \cap C_n = \emptyset$. En conclusión, X es un espacio topológico compacto.

2. Sea $U \subseteq X$ un abierto. Toda cadena descendente de cerrados de U

$$C_1 \supseteq C_2 \supseteq C_3 \supseteq \cdots$$

define, tomando cierres en X, una cadena de cerrados en X

$$\bar{C}_1 \supseteq \bar{C}_2 \supseteq \bar{C}_3 \supseteq \cdots$$

que ha de estabilizar, por ser noetheriano. Ahora bien, como $C_i = \bar{C}_i \cap U$, tendremos que la cadena de partida también estabiliza. En conclusión, U es noetheriano.

3. Supongamos que X no es unión de un número finito de cerrados irreducibles. En particular, X no es irreducible, luego es unión de dos cerrados propios, $X = C_1 \cup C_2$. C_1 y C_2 no pueden ser los dos a la vez unión de un número finito de cerrados irreducibles. Digamos que C_1 no es unión de un número finito de cerrados irreducibles. En particular, C_1 no es un cerrado irreducible, luego es unión de dos cerrados propios $C_1 = C_{11} \cup C_{12}$. C_{11} y C_{12} no pueden ser los dos a la vez unión de un número finito de cerrados irreducibles. Digamos que C_{11} no es unión de un número finito de cerrados irreducibles. En particular, C_{11} no es un cerrado irreducible, luego es unión de dos cerrados propios $C_{11} = C_{111} \cup C_{112}$. Así sucesivamente, vamos construyendo la cadena descendente de inclusiones estrictas

$$C_1 \supset C_{11} \supset C_{111} \supset \cdots$$

lo que contradice la noetherianidad de X. En conclusión, X es unión de un número finito de cerrados irreducibles.

□

16. Proposición : *En todo anillo noetheriano el número de ideales primos minimales es finito.*

Demostración. Sea A un anillo noetheriano. Sabemos que $X = \operatorname{Spec} A$ es un espacio topológico noetheriano (2.2.14). Por tanto, $X = C_1 \cup \cdots \cup C_r$, siendo los C_i las componentes irreducibles de X. Ahora bien, C_i es una componente irreducibles de X si y sólo si $C_i = \bar{x}_i$ (para un único punto x_i) donde $\mathfrak{p}_{x_i}$ es un ideal primo minimal (1.5.18). Luego el número de ideales primos minimales es finito. □

17. Corolario : *Si A es un anillo noetheriano reducido, entonces*

$$0 = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n$$

donde $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ son los ideales primos minimales de A.

18. Ejercicio : Probar que un ideal de un anillo noetheriano es radical si y sólo si es intersección de un número finito de ideales primos.

2.3. Teorema de la base de Hilbert

1. Teorema de la base de Hilbert: *Si A es un anillo noetheriano entonces $A[x]$ es un anillo noetheriano.*

Demostración. Sea $I \subset A[x]$ un ideal. Tenemos que ver que es finito generado:

Sea $J \subseteq A$ el conjunto formado por los coeficientes de máximo grado de los $p(x) \in I$. Es fácil ver que J es un ideal de A. Observemos para ello, que si $p(x) = a_0x^n + \cdots + a_n$, $q(x) = b_0x^m + \cdots + b_m \in I$, entonces $x^m p(x) + x^n q(x) = (a_0 + b_0)x^{n+m} + \cdots \in I$, luego si $a_0, b_0 \in J$ entonces $a_0 + b_0 \in J$.

Por ser A noetheriano, $J = (b_1, \ldots, b_r)$ es finito generado. Así, existen $p_1, \ldots, p_r \in I$ cuyos coeficientes de grado máximo son $b_1, \ldots, b_r$, respectivamente. Además, multiplicando cada p_i por una potencia conveniente de x, podemos suponer que $\operatorname{gr} p_1 = \cdots = \operatorname{gr} p_r$. Escribamos $\operatorname{gr} p_i = m$.

Dado $p(x) = a_0x^n + \cdots + a_n \in I$. Supongamos que $n \geq m$. Escribamos $a_0 = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_r b_r$, con $\lambda_i \in A$ para todo i. Tenemos que $p(x) - \sum_i \lambda_i x^{n-m} p_i \in I$ y $\operatorname{gr}(p(x) - \sum_i \lambda_i x^{n-m} p_i) < \operatorname{gr} p(x)$.

Recurrentemente obtendré que

$$I = (p_1, \ldots, p_r)_{A[x]} \; + \; I \cap \{A + Ax + \cdots + Ax^{m-1}\}$$

Ahora bien $I \cap \{A + Ax + \cdots + Ax^{m-1}\}$ es un A-módulo finito generado ya que es submódulo de $\{A + Ax + \cdots + Ax^{m-1}\}$, que es un A-módulo noetheriano. En conclusión, si escribimos $I \cap \{A + Ax + \cdots + Ax^{m-1}\} = (q_1, \ldots, q_s)_A$, tenemos que $I = (p_1, \ldots, p_r, q_1, \ldots, q_s)$.

□

2. Definición : Dado un morfismo de anillos $f\colon A \to B$ se dice que B es una A-álgebra. Se dice que B es una A-álgebra de tipo finito si existen $\xi_1, \ldots, \xi_n \in B$ que generen A-algebraicamente B, es decir, si el morfismo

$$A[x_1, \ldots, x_n] \to B, \quad \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} a_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \mapsto \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} f(a_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}) \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}$$

es epiyectivo.

3. Corolario : *Sea k un cuerpo. Toda k-álgebra de tipo finito es noetheriana.*

Demostración. Todo cuerpo es un anillo noetheriano, luego k es noetheriano. Por el teorema de la base de Hilbert $k[x_1]$ es noetheriano. De nuevo, por el teorema de la base de Hilbert, $k[x_1, x_2]$ es noetheriano. En conclusión $k[x_1, \ldots, x_n]$ es noetheriano y todo cociente $k[x_1, \ldots, x_n]/I$ también. Luego toda k-álgebra de tipo finito es noetheriana.

□

2.4. Morfismos finitos. Teorema de ascenso

1. Definición : Un morfismo de anillos $f\colon A \to B$ se dice que es finito si B es un A-módulo finito, con la estructura natural de A-módulo que define f en B ($a \cdot b := f(a) \cdot b$). En este caso, también se dice que B es una A-álgebra finita.

2. Proposición : *La composición de morfismos finitos es finito.*

Demostración. Sean $A \overset{\text{finito}}{\longrightarrow} B \overset{\text{finito}}{\longrightarrow} C$. Es decir, $B = Ab_1 + \cdots + Ab_n$ y $C = Bc_1 + \cdots + Bc_m$. Luego,

$$C = (Ab_1 + \cdots + Ab_n)c_1 + \cdots + (Ab_1 + \cdots + Ab_n)c_m = \sum_{i=1,j=1}^{n,m} Ab_i c_j$$

En conclusión, $A \to C$ es un morfismo finito.

□

3. Proposición : *Si $A \to B$ es un morfismo finito y $A \to C$ un morfismo de anillos, entonces $C = A \otimes_A C \to B \otimes_A C$ es un morfismo finito. "Los morfismos finitos son estables por cambio de base".*

Demostración. Inmediato. □

4. Corolario : *Si $A \to B$ es un morfismo finito, entonces $A_S \to B_S$ y $A/I \to B/I \cdot B$ son morfismos finitos*

5. Definición : Sea $A \to B$ un morfismo de anillos. Se dice que $b \in B$ es entero sobre A si verifica una relación del tipo

$$b^n + a_1 b^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \qquad \text{con}\, a_i \in A$$

El teorema de Hamilton-Cayley para los endomorfismos de espacios vectoriales también es cierto para los endomorfismos de módulos. Con precisión, sea $M = \langle m_1, \ldots, m_r \rangle$ un A-módulo finito generado, $f\colon M \to M$, $f(m_i) = \sum_j a_{ij} m_j$ un endomorfismo de A-módulos; si $p_c(x)$ es el polinomio característico de la matriz (a_{ij}), entonces $p_c(f) = 0$. En efecto, consideremos la matriz $B = (x_{ij})$ de coeficientes variables y el polinomio característico $P_c(X)$ de esta matriz. $P_c(X)$ es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{Z}[x_{ij}] \subset \mathbb{Q}(x_{ij})$. Por el teorema de Hamilton-Cayley $P_c(B) = 0$. Por tanto, especializando a $x_{ij} = a_{ij}$, tendremos que $p_c(f) = 0$.

6. Proposición : *Sean $f\colon A \to B$ un morfismo de anillos y $b \in B$. Denotemos $A[b] = \{p(b) \in B,$ para $p(x) \in A[x]\}$. El morfismo $A \to A[b]$ es finito $\Leftrightarrow$ b es entero sobre A.*

Demostración. $\Rightarrow$) Consideremos el endomorfismo de A-módulos

$$\begin{aligned} A[b] &\xrightarrow{\cdot b} A[b] \\ p(b) &\longmapsto p(b) \cdot b \end{aligned}$$

Si (a_{ij}) es una matriz asociada a $\cdot b$ en un sistema generador de $A[b]$, entonces el polinomio característico de (a_{ij}) anula a $\cdot b$, luego anula a b, luego b es entero sobre A.

$\Leftarrow$) Sea $p(x)$ un polinomio mónico de grado n con coeficientes en A que anula a b. Entonces $A[b]$ es un cociente de $A[x]/(p(x))$. Como $A[x]/(p(x))$ es un A-módulo generado por $\bar{1}, \dots, \bar{x}^{n-1}$ se concluye. □

Observación: Para la demostración de $\Rightarrow$) sólo es necesario suponer que $A[b]$ está incluido en una A-álgebra finita.

7. Ejemplo : Si α es una raíz n-ésima de la unidad, entonces $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}(\alpha)$ es un morfismo finito.

8. Ejemplo : El morfismo $\operatorname{Spec} k[x, y]/(y^2 - x^2 + x^3) \to \operatorname{Spec} k[x]$ definido por $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha$ es un morfismo finito.

9. Proposición : *Sea $f : A \to B$ un morfismo de anillos. El conjunto de elementos de B enteros sobre A forman una A-subálgebra de B.*

Demostración. Sean $b_1, b_2 \in B$ enteros sobre A. Tenemos que $A \to A[b_1]$ es un morfismo finito, y $A[b_1] \to A[b_1, b_2]$ es un morfismo finito porque si b_2 verifica una relación entera con coeficientes en A, en particular la verifica con coeficientes en $A[b_1]$. Por tanto, por la proposición 2.4.2, $A \to A[b_1, b_2]$ es un morfismo finito. Luego, por la observación anterior, todo elemento $p(b_1, b_2) \in A[b_1, b_2] \in B$, con $p(x, y) \in A[x, y]$, es entero sobre A.

□

10. Definición : Diremos que un anillo íntegro A es íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones Σ, si todo elemento de Σ entero sobre A pertenece a A. También se dice que A es un anillo normal.

Se dice que un morfismo de anillos $A \to B$ es entero si todo elemento de B es entero sobre A, es decir, si B es unión de A-subálgebras finitas.

Sea $A \to B$ un morfismo inyectivo de anillos. Llamaremos cierre entero de A en B al subanillo de B formado por todos los elementos de B enteros sobre A.

Dejamos que el lector pruebe que el cierre entero de un anillo íntegro en su cuerpo de fracciones es un anillo íntegramente cerrado.

11. Ejercicio : Demostrar que $\mathbb{Z}$ es un anillo íntegramente cerrado en $\mathbb{Q}$.

12. Proposición : *Si $f : A \hookrightarrow B$ es un morfismo finito e inyectivo, entonces el morfismo inducido $f^* : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ es epiyectivo.*

Demostración. Supongamos que f es un morfismo finito. Dado $x \in \operatorname{Spec} A$, el morfismo $A_x \to B_x$ es finito e inyectivo. Por Nakayama, $\mathfrak{p}_x B_x \neq B_x$, luego $\operatorname{Spec} B_x/\mathfrak{p}_x B_x \neq \emptyset$. Es decir, la fibra de x es no vacía, luego f^* es epiyectivo.

□

13. Definición : Llamaremos dimensión de Krull de un anillo A, al supremo de las longitudes de las cadena de ideales primos de A, o equivalentemente, al supremo de las longitudes de las cadenas de cerrados irreducibles de $\operatorname{Spec} A$. Denotaremos a la dimensión (de Krull) de A por $\dim A$. Llamaremos dimensión de $\operatorname{Spec} A$ a la dimensión de Krull de A.

14. Ejercicio : Demostrar que la dimensión de Krull de $\mathbb{Z}$ y $k[x]$ es uno y la de $\mathbb{C}[x, y]$ dos.

15. Proposición : *Toda k-álgebra finita e íntegra es cuerpo.*

Demostración. Sea A una k-álgebras finita íntegra. Dado $a \in A$ no nula, la homotecia $A \overset{\cdot a}{\to} A$, $b \mapsto b \cdot a$ es inyectiva, por ser A íntegra. Por tanto, por dimensiones, es isomorfismo. Luego a es invertible y A es cuerpo. □

16. Proposición: *El espectro de una k-álgebra finita es un número finito de puntos cerrados.*

Demostración. Las k-álgebras finitas son anillos noetherianos luego tienen un número finito de ideales primos minimales. Si hacemos cociente por un ideal primo minimal obtenemos una k-álgebra finita íntegra, luego es un cuerpo por la proposición anterior. Por tanto, los ideales primos minimales son maximales y hemos concluido. □

17. Teorema: *Sea $f\colon A \to B$ es un morfismo finito. El morfismo inducido $f^*\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ es una aplicación cerrada de fibras finitas de dimensión cero.*

Demostración. Sea $C = (J)_0$ un cerrado de $\operatorname{Spec} B$. Debemos demostrar que $f^*(C)$ es un cerrado de $\operatorname{Spec} A$. Consideremos los diagramas

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A/(J \cap A) \arrow[r] & B/J \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \operatorname{Spec} A & & \operatorname{Spec} B \arrow[ll, "f^*"'] \\ (J \cap A)_0 = \operatorname{Spec} A/(J \cap A) \arrow[u, hook] & & \operatorname{Spec} B/J = C \arrow[ll, "{f^*}_{|C}"] \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Como $A/J \cap A \hookrightarrow B/J$ es un morfismo finito inyectivo, por 2.4.12 ${f^*}_{|C}$ es epiyectiva y $f^*(C) = (J \cap A)_0$.

La fibra de un punto $x \in \operatorname{Spec} A$ es ${f^*}^{-1}(x) = \operatorname{Spec} B_x/\mathfrak{p}_x B_x$. Observemos que si ${f^*}^{-1}(x) \neq \emptyset$ entonces $B_x/\mathfrak{p}_x B_x$ es una $A_x/\mathfrak{p}_x$-álgebra finita. Por la proposición 2.4.16, concluimos que f^* es de fibras de dimensión cero y finitas. □

18. Ejercicio: Probar que la inclusión natural $k[x] \hookrightarrow k[x,y]/(xy-1)$ no es un morfismo finito.

19. Teorema del ascenso: *Sea $f\colon A \to B$ un morfismo entero. Sean $\mathfrak{p}_x \subset \mathfrak{p}_{x'} \subset A$ y $\mathfrak{p}_y \subset B$ ideales primos, de modo que $f^{-1}(\mathfrak{p}_y) = \mathfrak{p}_x$. Existe un ideal primo $\mathfrak{p}_{y'} \subset B$, de modo que $\mathfrak{p}_y \subset \mathfrak{p}_{y'}$ y $f^{-1}(\mathfrak{p}_{y'}) = \mathfrak{p}_{x'}$.*

Demostración. El morfismo $A/\mathfrak{p}_x \to B/\mathfrak{p}_y$ es entero e inyectivo, luego epiyectivo entre espectros (2.4.12); es decir, $f^*\colon (\mathfrak{p}_y)_0 \to (\mathfrak{p}_x)_0$ es epiyectivo y existe $y' \in (\mathfrak{p}_y)_0$ tal que $f^*(y') = x'$. □

Recordemos que la dimensión de Krull de un anillo A es el supremo de las longitudes de las cadena de ideales primos de A, o equivalentemente el supremo de las longitudes de las cadenas de cerrados irreducibles de $\operatorname{Spec} A$. Se denota $\dim A$ a la dimensión (de Krull) de A.

20. Corolario: *Si $f\colon A \hookrightarrow B$ es un morfismo finito inyectivo, entonces* $\dim A = \dim B$.

Demostración. Dada una cadena estricta de ideales primos $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n$ de B, $f^{-1}(\mathfrak{p}_1) \subset f^{-1}(\mathfrak{p}_2) \subset \cdots \subset f^{-1}(\mathfrak{p}_n)$ es una cadena de ideales primos estricta de A, pues las fibras del morfismo inducido por f entre los espectros son de dimensión cero, por 2.4.17. Por tanto, $\dim B \leq \dim A$.

Sea ahora una cadena estricta de ideales primos $\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{q}_n$ de A. Sea $\mathfrak{p}_1$ un ideal primo de B, tal que $f^{-1}(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{q}_1$ (existe por 2.4.12). Por el teorema del ascenso, existe $\mathfrak{p}_2 \supset \mathfrak{p}_1$ tal que $f^{-1}(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{q}_2$. Así sucesivamente, obtendremos una cadena estricta de ideales primos $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n$ de B (de antimagen por f, la cadena de A). Por tanto, $\dim A \leq \dim B$, luego $\dim A = \dim B$. □

2.5. Lema de Normalización de Noether. Teorema de los ceros de Hilbert

1. Definición : Diremos que $\operatorname{Spec} A$ es una variedad algebraica afín sobre un cuerpo k, si A es una k-álgebra de tipo finito. Los cerrados de las variedades algebraicas los llamaremos subvariedades algebraicas.

Si A y B son k-álgebras de tipo finito y $f\colon A \to B$ es un morfismo de k-álgebras, diremos que el morfismo inducido $f^*\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ es un morfismo de variedades algebraicas.

2. Definición : Sea A una k-álgebra. Diremos que $\xi_1, \ldots, \xi_n \in A$ son algebraicamente independientes sobre k si el morfismo de k-álgebras

$$\begin{aligned} k[x_1, \ldots, x_n] &\to A \\ p(x_1, \ldots, x_n) &\mapsto p(\xi_1, \ldots, \xi_n) \end{aligned}$$

es inyectivo; es decir, cuando cualquier relación algebraica $\sum_{i_1\ldots i_n} a_{i_1\ldots i_n}\xi_1^{i_1}\ldots\xi_n^{i_n} = 0$, con coeficientes en k, tenga todos sus coeficientes nulos.

3. Lema de normalización de Noether : *Sea $A = k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ una k-álgebra de tipo finito. Supongamos que k tiene un número infinito de elementos*[1]*. Existe un morfismo finito e inyectivo*

$$k[x_1, \ldots, x_r] \hookrightarrow A$$

"Toda variedad algebraica afín se proyecta con fibras finitas en un espacio afín".

Demostración. Vamos a hacerlo por inducción sobre n. Para $n = 0$, no hay nada que decir. Supongamos que el teorema es cierto hasta $n - 1$.

Si los $\{\xi_i\}$ son algebraicamente independientes entre sí, entonces $k[\xi_1, \ldots, \xi_n] = k[x_1, \ldots, x_n]$. Podemos suponer que existe $p(x_1, \ldots, x_n) \in k[x_1, \ldots, x_n]$, no nulo, tal que $p(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$.

Escribamos $p(x_1,\ldots, x_n) = p_s(x_1,\ldots, x_n) + p_{s-1}(x_1,\ldots, x_n) + \ldots + p_0(x_1,\ldots, x_n)$ como suma de polinomios $p_i(x_1, \ldots, x_n)$ homogéneos de grado i. Sean $x_i = x_i' + \lambda_i x_n$, entonces

$$\begin{aligned} &p(x_1' + \lambda_1 x_n, \ldots, x_{n-1}' + \lambda_{n-1}x_n, x_n) = p_s(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, 1)x_n^s + \\ &\text{polinomio en } x_1', \ldots, x_{n-1}', x_n \text{ de grado en } x_n \text{ menor que } s \end{aligned}$$

Así pues, si elegimos $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in k$ de modo que $p_s(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, 1) \neq 0$, tendremos que ξ_n es entero sobre $k[\xi_1', \ldots, \xi_{n-1}']$, con $\xi_i' = \xi_i - \lambda_i\xi_n$. Por tanto, la composición

$$k[x_1,\ldots, x_r] \underset{\text{Hip.ind.}}{\overset{\text{finito}}{\hookrightarrow}} k[\xi_1', \ldots, \xi_{n-1}'] \overset{\text{finito}}{\hookrightarrow} k[\xi_1',\ldots, \xi_{n-1}', \xi_n] = k[\xi_1,\ldots, \xi_{n-1}, \xi_n]$$

es un morfismo finito. $\square$

4. Teorema de los ceros de Hilbert : *Sea A una k-álgebra de tipo finito y $\mathfrak{m}$ un ideal maximal. Entonces $A/\mathfrak{m}$ es una extensión finita de k. En particular, si k es algebraicamente cerrado, entonces $k = A/\mathfrak{m}$: "Todo punto cerrado de una variedad algebraica afín sobre un cuerpo algebraicamente cerrado es racional".*

[1] Esta hipótesis no es necesaria, sólo la imponemos porque la demostración del lema es algo más sencilla.

Demostración. Obviamente $A/\mathfrak{m}$ es una k-álgebra de tipo finito sobre k. Por el lema de normalización de Noether, existe un morfismo finito inyectivo

$$k[x_1,\dots,x_r] \hookrightarrow A/\mathfrak{m}$$

Por tanto, $k[x_1,\dots,x_r]$ ha de tener dimensión cero, luego $r=0$ y concluimos. $\square$

5. Ejercicio : Sean $X = \operatorname{Spec} A$ y $Y = \operatorname{Spec} B$ dos variedades algebraicas sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k. Definamos $X \times_k Y := \operatorname{Spec} A \otimes_k B$. Probar que los puntos cerrados de $X \times_k Y$ son el producto cartesiano de los puntos cerrados de X y los puntos cerrados de Y.

6. Proposición : *Si $f^*\colon X = \operatorname{Spec} B \to Y = \operatorname{Spec} A$ es un morfismo entre variedades algebraicas afines, entonces la imagen de un punto cerrado es un punto cerrado.*

Demostración. Si x es un punto cerrado de X e y es su imagen por f^*, entonces $A/\mathfrak{p}_y \to B/\mathfrak{m}_x$ es inyectivo. Por el teorema de los ceros de Hilbert, $B/\mathfrak{m}_x$ es una extensión finita de k, por tanto $A/\mathfrak{p}_y$ es una k-álgebra finita e íntegra, luego es un cuerpo; es decir, y es un punto cerrado. $\square$

7. Corolario : *Los puntos cerrados de un abierto de una variedad algebraica son puntos cerrados en la variedad algebraica.*

Demostración. Sea $X = \operatorname{Spec} A$ la variedad algebraica. Todo abierto es unión de abiertos básicos, luego basta probar el enunciado para un abierto básico $U_a \subset X$. Ahora bien, como A es una k-álgebra de tipo finito entonces $A_a = A[\frac{1}{a}]$ es una k-álgebra de tipo finito. Luego $U_a = \operatorname{Spec} A_a$ es una variedad algebraica. Se concluye por la proposición anterior aplicada a la inclusión $U_a \hookrightarrow X$. $\square$

8. Definición : Diremos que $X = \operatorname{Spec} A$ es íntegra si A es un anillo íntegro. Diremos que $X = \operatorname{Spec} A$ es reducida si A es un anillo reducido.

9. Corolario (Forma fuerte de los ceros de Hilbert) : *Sea A una k-álgebra de tipo finito. Si $f \in A$ pertenece a todo ideal maximal, entonces es nilpotente. En particular, si $X = \operatorname{Spec} A$ es una variedad algebraica reducida sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, entonces una función es nula si y sólo si se anula en todos los puntos racionales.*

Demostración. Por el corolario anterior, los ideales maximales de A_f, se corresponden con los ideales maximales de A que no contienen a f. Por tanto, si f pertenece a todo ideal maximal, entonces el espectro maximal de A_f es vacío, luego $A_f = 0$ y por tanto f es nilpotente. $\square$

10. Corolario : *Dos subconjuntos cerrados de una variedad algebraica afín son iguales si y sólo si contienen los mismos puntos cerrados.*

Demostración. Una función se anula sobre todos los puntos de un cerrado de una variedad algebraica si y sólo si se anula sobre todos los puntos cerrados del cerrado, por el corolario anterior. Como todo cerrado son los ceros del ideal de todas las funciones que se anulan sobre él, hemos terminado. $\square$

2.6. Teoría de la dimensión en variedades algebraicas

Vamos a desarrollar la teoría de la dimensión en variedades algebraicas apoyándonos fundamentalmente en el lema de normalización de Noether.

1. Definición : Sea $k \hookrightarrow \Sigma$ una extensión de cuerpos y $\xi_1, \dots, \xi_n \in \Sigma$. Diremos que ξ_n es algebraico sobre $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ si existe un polinomio $p(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]$ de modo que $p(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n) = 0$ y $p(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, x_n) \neq 0$. En caso contrario diremos que ξ_n es algebraicamente independiente de $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$.

2. Proposición : *Sea $k \hookrightarrow \Sigma$ una extensión de cuerpos y $\xi_1, \dots, \xi_n \in \Sigma$. Entonces, ξ_n es algebraico sobre $\xi_1, \dots, \xi_{n-1} \iff \xi_n$ es entero sobre $k(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $p(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]$ tal que $p(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n) = 0$ y $p(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, x_n) \neq 0$. Escribamos $p(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, x_n) = a_0(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})x_n^r + a_1(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})x_n^{r-1} + \dots + a_r(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, con $a_0(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \neq 0$. Obviamente

$$0 = p(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n) = a_0(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}){\xi_n}^r + a_1(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}){\xi_n}^{r-1} + \dots + a_r(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}),$$

luego

$${\xi_n}^r + \frac{a_1(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})}{a_0(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})}\xi_n^{r-1} + \dots + \frac{a_r(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})}{a_0(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})} = 0$$

y ξ_n es entero sobre $k(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$.

$\Leftarrow$) Consideremos una relación entera

$${\xi_n}^r + \frac{a_1(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})}{b_1(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})}\xi_n^{r-1} + \dots + \frac{a_r(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})}{b_r(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})} = 0$$

entonces multiplicando por $b = b_1 \cdots b_r \neq 0$ obtenemos

$$b \cdot \xi_n^r + (b_2 \cdots b_r)\xi_n^{r-1} + \dots + (b_1 \cdots b_{r-1}) = 0$$

Si consideramos el polinomio

$$\begin{aligned} p(x_1, \dots, x_n) = b(x_1, \dots, x_{n-1}) \cdot x_n^r &+ (b_2(x_1, \dots, x_{n-1}) \cdots b_r(x_1, \dots, x_{n-1}))x_n^{r-1} \\ &+ \dots + (b_1(x_1, \dots, x_{n-1}) \cdots b_{r-1}(x_1, \dots, x_{n-1})) \end{aligned}$$

es fácil ver que ξ_n es algebraico sobre $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$.

□

3. Proposición: *Las funciones $\xi_1, \dots, \xi_n \in K$ son k-algebraicamente independientes $\iff \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ son k-algebraicamente independientes y ξ_n es algebraicamente independiente de $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Es obvio.

$\Leftarrow$) Sea $p(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]$ tal que $p(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0$. Entonces $p(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, x_n) = 0$. Escribamos $p(x_1, \dots, x_n) = \sum_i a_i(x_1, \dots, x_{n-1}) \cdot x_n^i$. Como $p(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, x_n) = 0$ entonces $a_i(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = 0$ para todo i. Como $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ son k-algebraicamente independientes entonces $a_i(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0$ para todo i, luego $p(x_1, \dots, x_n) = 0$. □

4. Definición : Una extensión de cuerpos $K \to K'$ se dice algebraica si todo elemento de K' es entero sobre K.

5. Definición : Sea $k \to \Sigma$ una extensión de cuerpos. Diremos que $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \Sigma$ forman una base de trascendencia de Σ sobre k, si son algebraicamente independientes y $k(\xi_1, \ldots, \xi_n) \to \Sigma$ es algebraica; es decir, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ son algebraicamente independientes sobre k y todo elemento de Σ es algebraico sobre $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

6. Teorema : *Sea $k \hookrightarrow \Sigma$ una extensión de cuerpos, generada por un número finito de elementos. Existen bases de trascendencia de Σ sobre k y todas tienen el mismo número de elementos, llamado grado de trascendencia de Σ sobre k.*

Demostración. Sea $\Sigma = k(\xi_1, \ldots, \xi_r)$. Reordenando los generadores si fuera preciso, podemos suponer que $\xi_1, \ldots, \xi_n$ son algebraicamente independientes sobre k y ξ_i es algebraico sobre $\xi_1, \ldots, \xi_n$ para todo $i > n$. Por 2.4.2, Σ es una extensión algebraica de $k(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, luego $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ es una base de trascendencia de Σ sobre k.

Por otra parte, sea $\{y_1, \ldots, y_m\}$ otra base de trascendencia de Σ sobre k. Probemos por inducción sobre i que, reordenando si fuera preciso, Σ es una extensión algebraica de $k(\xi_1, \ldots, \xi_i, y_{i+1}, \ldots, y_m)$, para $i \leq n$. Para $i = 0$ es inmediato. Si $i \geq 1$, por hipótesis de inducción ξ_i es algebraico sobre $k(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, y_i, \ldots, y_m)$, luego $\xi_1, \ldots, \xi_i, y_i, \ldots, y_m$ son algebraicamente dependientes. Como $\xi_1, \ldots, \xi_i$ son algebraicamente independientes, reordenando $y_i, \ldots, y_m$ podemos suponer que y_i es algebraico sobre $k(\xi_1, \ldots, \xi_i, y_{i+1}, \ldots, y_m)$. Por tanto se tienen extensiones algebraicas

$$k(\xi_1, \ldots, \xi_i, y_{i+1}, \ldots, y_m) \hookrightarrow k(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_i, y_i, \ldots, y_m) \underset{\text{Inducción}}{\hookrightarrow} \Sigma$$

luego Σ es algebraico sobre $k(\xi_1, \ldots, \xi_i, y_{i+1}, \ldots, y_m)$. Ahora, si m fuera menor que n, tendríamos que Σ es algebraico sobre $k(\xi_1, \ldots, \xi_m)$, contra la hipótesis de que $\xi_1, \ldots, \xi_m, \xi_{m+1}$ son algebraicamente independientes. Luego $m \geq n$. Por la misma razón $n \geq m$ y $n = m$. $\square$

7. Ejemplo : Sea k un cuerpo. El cuerpo $k(x_1, \ldots, x_n)$ de las funciones racionales del espacio afín $\mathbb{A}^n$ tiene grado de trascendencia n, porque las funciones $x_1, \ldots, x_n$ forman claramente una base de trascendencia sobre k.

8. Ejemplo : Sea $p(x_1, \ldots, x_n)$ un polinomio irreducible no constante con coeficientes en un cuerpo k. Denotemos $k(\xi_1, \ldots, \xi_n) =$ cuerpo de fracciones de $k[x_1, \ldots, x_n]/(p(x_1, \ldots, x_n))$, que se denomina cuerpo de funciones racionales de la hipersuperficie definida por la ecuación $p(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Entonces $k(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ tiene grado de trascendencia $n-1$ sobre k. En efecto, reordenando las variables, podemos suponer que el grado de $p(x_1, \ldots, x_n)$ en x_n es ≥ 1; es fácil ver entonces que $\{\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}$ es una base de trascendencia.

Notación: Denotaremos por $\operatorname{gr}\operatorname{tr}_k K$ el grado de trascendencia de K sobre k, o simplemente por $\operatorname{gr}\operatorname{tr} K$ cuando se sobrentienda sobre qué cuerpo base.

9. Teorema : *Sea A una k-álgebra de tipo finito íntegra. La dimensión de Krull de A coincide con el grado de trascendencia de su cuerpo de fracciones.*

Demostración. Vamos a demostrarlo por inducción sobre el grado de trascendencia. Si el grado de trascendencia del cuerpo de fracciones es cero, entonces es una extensión finita de k, luego A es una k-álgebra finita íntegra. Por tanto, A es un cuerpo y su dimensión de Krull es cero.

Por el lema de Noether, existe un morfismo finito $k[x_1, \ldots, x_n] \hookrightarrow A$, que induce un morfismo finito entre sus cuerpos de fracciones (pruébese)

$$k(x_1, \ldots, x_n) \to \Sigma$$

luego $\operatorname{gr\,tr}\Sigma = \operatorname{gr\,tr} k(x_1,\dots,x_n) = n$. Por otra parte, $\dim k[x_1,\dots,x_n] = \dim A$, por 2.4.20. Por tanto, podemos suponer que $A = k[x_1,\dots,x_n]$ y tenemos que ver que su dimensión de Krull es n. Sea

$$0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_m$$

una cadena irrefinable de ideales primos de $k[x_1,\dots,x_n]$. Sea $p \in \mathfrak{p}_1$, no nulo e irreducible. Como $k[x_1,\dots,x_n]$ es un dominio de factorización única (p) es un ideal primo, luego $(p) = \mathfrak{p}_1$. El anillo $k[x_1,\dots,x_n]/(p)$ es íntegro y su cuerpo de fracciones es de grado de trascendencia $n-1$. Por inducción sobre el grado de trascendencia, las cadenas de ideales primos en $k[x_1,\dots,x_n]/(p)$ son de longitud menor o igual que $n-1$. Haciendo cociente por (p), la cadena anterior define una cadena

$$\bar{0} \subset \bar{\mathfrak{p}}_2 \subset \cdots \subset \bar{\mathfrak{p}}_m$$

luego $m-1 \leq n-1$ y $\dim A \leq n$. Por otra parte

$$0 \subset (x_1) \subset (x_1,x_2) \subset \cdots \subset (x_1,\dots,x_n)$$

es una cadena de longitud n, luego $\dim A \geq n$. En conclusión A tiene dimensión de Krull n. □

Observemos que $\dim A = \dim A_{\text{red}}$. Por tanto, la dimensión de una variedad irreducible $\operatorname{Spec} A$ coincide con la dimensión de $\operatorname{Spec} A_{\text{red}}$, que es una variedad algebraica íntegra. En general, toda variedad algebraica es unión de variedades algebraicas irreducibles y la dimensión de la variedad es el máximo de las dimensiones de sus componentes irreducibles.

10. Ejercicio: Sean $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$ y $X \times_k Y := \operatorname{Spec} A \otimes_k B$ variedades algebraicas. Demostrar que

$$\dim(X \times_k Y) = \dim X + \dim Y$$

11. Ejercicio: Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo entre variedades algebraicas irreducibles. Sea $C \subset X$ un cerrado. Demostrar que

$$\dim C \geq \dim \overline{f(C)}$$

12. Teorema del ideal principal de Krull: *Sea $X = \operatorname{Spec} A$ una variedad algebraica íntegra. Sea $f \in A$, no nula ni invertible. Entonces*

$$\dim (f)_0 = \dim X - 1$$

Es más, todas las componentes irreducibles de $(f)_0$ son de dimensión $\dim X - 1$.

Demostración. Si $X = \operatorname{Spec} k[x_1,\dots,x_n]$ y descomponemos $f = p_1\cdot\ldots\cdot p_s$ en producto de irreducibles, tenemos que $(f)_0 = \cup (p_i)_0$. Basta probar que $\dim(p_i)_0 = n-1$. Ahora bien, el grado de trascendencia del cuerpo de funciones de $k[x_1,\dots,x_n]/(p_i)$ es $n-1$, luego $\dim(p_i)_0 = n-1$.

Escribamos $(f)_0 = C_1 \cup \cdots \cup C_s$ como unión de componentes irreducibles. Tenemos que probar que $\dim C_1 = \dim X - 1$. Sea $a \in A$ que se anule en todo $C_2 \cup \cdots \cup C_s$ y no se anule en todo C_1. Por 2.6.9, $\dim X = \dim U_a$ y $\dim C_1 = \dim C_1 \cap U_a$. Ahora bien, $C_1 \cap U_a$ coincide con los ceros de f en U_a. En conclusión, si probamos que la dimensión de los ceros de f en U_a es igual a $\dim U_a - 1$, tendremos que $\dim C_1 = \dim X - 1$. Sustituyendo X por U_a podemos suponer que $(f)_0$ sólo tiene una única componente irreducible.

Consideremos, por el lema de normalización de Noether, un morfismo finito $k[x_1,\dots,x_n] \hookrightarrow A$. La inclusión $i\colon k[x_1,\dots,x_n][f] \hookrightarrow A$ es un morfismo finito inyectivo. Además, $i^{*-1}((f)_0) = (f)_0$ luego $i^*((f)_0) = (f)_0$. Por tanto, la dimensión de $(f)_0$ en $\operatorname{Spec} k[x_1,\dots,x_n][f]$ es la misma que la de $(f)_0$ en $\operatorname{Spec} A$. Por tanto, podemos suponer que $A = k[x_1,\dots,x_n][f]$.

Sea $p(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})$ un polinomio irreducible tal que $p(x_1,\dots,x_n,f)=0$. El epimorfismo

$$k[x_1,\dots,x_{n+1}]/(p(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})) \to k[x_1,\dots,x_n][f],\ \bar{x}_{n+1}\mapsto f$$

es un isomorfismo, porque $k[x_1,\dots,x_{n+1}]/(p(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}))$ es un anillo de dimensión n, íntegro y si hubiese núcleo la dimensión de $k[x_1,\dots,x_n][f]$ sería menor que n.

En conclusión $A=k[x_1,\dots,x_{n+1}]/(p(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}))$ y $f=x_{n+1}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\dim(f)_0 &= \dim A/(f) = \dim k[x_1,\dots,x_{n+1}]/(p(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}),x_{n+1})\\ &= \dim k[x_1,\dots,x_n]/(p(x_1,\dots,x_n,0)) = n-1\end{aligned}$$

□

13. Definición : Una cadena de cerrados irreducibles diremos que es maximal si no está incluida en ninguna otra mayor.

14. Corolario : *Todas las cadenas maximales de cerrados irreducibles de una variedad algebraica irreducible tienen la misma longitud, que es la dimensión de Krull de la variedad.*

Demostración. Sea $X=\operatorname{Spec} A$ la variedad algebraica irreducible. Como $\operatorname{Spec} A = \operatorname{Spec} A_{\mathrm{red}}$, podemos suponer que la variedad algebraica es íntegra. Demostraremos el corolario por inducción sobre la dimensión de Krull.

Sea $X\supset X_1\supset\cdots\supset X_m$ una cadena de cerrados irreducibles maximal. Sea $f\in A$ una función no nula que se anule en X_1. Si $(f)_0=Y_1\cup\cdots\cup Y_r$ es la descomposición de $(f)_0$ en cerrados irreducibles, X_1 es una de las componentes de la descomposición. Por el teorema anterior $\dim X_1=\dim X-1$, luego por inducción sobre la dimensión $m-1=\dim X_1=\dim X-1$, y por tanto $m=\dim X$. □

15. Definición : Se dice que una variedad algebraica es catenaria si todas las cadenas maximales de cerrados irreducibles con extremos cualesquiera prefijados tienen la misma longitud.

16. Corolario : *Las variedades algebraicas son catenarias.*

Demostración. Sean $Y\supset Y'$ cerrados irreducibles de una variedad algebraica X. Toda cadena maximal de extremos Y e Y' induce, adjuntando una cadena maximal de Y', una cadena maximal de Y, luego tiene longitud $\dim Y-\dim Y'$, por el corolario anterior. □

17. Proposición : *Si* $X=\operatorname{Spec} A$ *es una variedad algebraica irreducible y* $x\in X$ *un punto cerrado, entonces* $\dim X=\dim A_x$.

Demostración. La dimensión de Krull de A_x coincide con la máxima longitud de las cadenas de cerrados irreducibles de X que pasan por x. Ahora bien, todas las cadenas maximales de cerrados irreducibles tienen longitud $\dim X$.

□

18. Proposición : *Sea* $X=\operatorname{Spec} A$ *una variedad algebraica irreducible de dimensión* n *e* $Y\subset X$ *una subvariedad algebraica irreducible de dimensión* m. *El número mínimo* r *para el cual existen* r *funciones* $f_1,\dots f_r$ *de* X *tales que una de las componentes irreducibles de* $(f_1,\dots,f_r)_0$ *sea* Y *es* $r=n-m$ *(puede imponerse además que todas las componentes sean de dimensión* m*).*

Demostración. Es fácil probar, aplicando recurrentemente el teorema del ideal principal de Krull, que todas las componentes irreducibles de $(f_1,\ldots,f_r)_0$ tienen dimensión mayor o igual que $n-r$. Por tanto, tenemos que probar sólo la existencia de tales funciones para $r=n-m$.

Sea f_1 una función que se anule en todo Y y no en X. Escribamos $(f_1)_0=\cup_i C_i$, donde C_i son cerrados irreducibles de dimensión $n-1$. Sea f_2 una función que se anule en todo Y y no se anule en todo C_i, para cada i. Existe tal función: sea g_i que se anule en Y y en todos los C_j para $j\neq i$, y no se anule en todo C_i, entonces $f_2=\sum_i g_i$. Tenemos que $(f_1,f_2)_0$ es unión de cerrados irreducibles de dimensión $n-2$ y $(f_1,f_2)_0$ contiene a Y. Siguiendo de este modo obtenemos las funciones $f_1,\ldots,f_r$ requeridas.

□

19. Corolario: *Sea X una variedad algebraica irreducible de dimensión n y $x\in X$ un punto cerrado. El número mínimo de funciones $f_1,\ldots,f_r$ tales que $(f_1,\ldots,f_r)_0\cap U=\{x\}$, en algún entorno abierto U de x, es $r=n$.*

20. Ejercicio: Sean Y,Y' subvariedades irreducibles de $\mathbb{A}^n$. Llamemos codimensión de Y en $\mathbb{A}^n$, que denotaremos $\operatorname{codim} Y$, a $n-\dim Y$. Supongamos que $Y\cap Y'\neq 0$. Demuéstrese que

$$\operatorname{codim} Y+\operatorname{codim} Y'\geq \operatorname{codim}(Y\cap Y')$$

21. Ejercicio: Sea $f\colon X\to Y$ un morfismo entre variedades algebraicas irreducibles. Sea $y\in f(X)$ un punto cerrado. Demuéstrese que

$$\dim f^{-1}(y)\geq \dim X-\dim \overline{f(X)}$$

2.7. Problemas

1. Sea I un ideal de un anillo A y sea S un sistema multiplicativo de A. Probar que I_S es un ideal del anillo de fracciones A_S. Cuando $I=a_1A+\ldots+a_nA$, probar que $I_S=a_1A_S+\ldots+a_nA_S$; es decir, un sistema de generadores de I_S se obtiene localizando un sistema de generadores de I.

2. Si S es un sistema multiplicativo de una anillo noetheriano A, probar que el anillo A_S es noetheriano.

3. Sea $\mathcal{C}(X)$ el anillo de las funciones reales continuas sobre un espacio topológico metrizable X y sea x un punto de X. Consideremos el ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{C}(X)$ formado por las funciones que se anulan en x. Probar que $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}^2$. (*Indicación:* Si $f\in\mathfrak{m}$, entonces $f=\sup(f,0)-\sup(-f,0)$, y se reduce al caso en que f no toma valores negativos.)

   Si $\mathfrak{m}$ es un ideal finito-generado, usar el lema de Nakayama para concluir que $\mathfrak{m}\mathcal{O}=0$, donde $\mathcal{O}=\mathcal{C}(X)_{\mathfrak{m}}$ denota el anillo de gérmenes en x de funciones continuas, y que x es un punto aislado de X. Concluir que si algún punto x de X no está aislado, entonces el anillo $\mathcal{C}(X)$ no es noetherianos.

4. Sea $\mathfrak{n}$ el ideal de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ formado por las funciones que se anulan en algún entorno del punto $x=0$. Demostrar que el ideal $\mathfrak{n}$ no es finito-generado y concluir que los anillos $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ no son noetherianos cuando $n\geq 1$.

5. Sea $\mathfrak{m}_x$ el ideal maximal de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ formado por las funciones que se anulan en el punto 0. Probar que $\mathcal{O} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})_x$ es el anillo de gérmenes de funciones diferenciables en el punto $x = 0$. Sea I el ideal $\mathcal{O}$ formado por los gérmenes cuya serie de Taylor en $x = 0$ es nula. Probar que $xI = I$ y concluir que el anillo $\mathcal{O}$ no es noetheriano.

6. Sea M un A-módulo noetheriano. Probar que todo endomorfismo epiyectivo $f\colon M \to M$ es un isomorfismo. (*Indicación:* Considerar los submódulos $\operatorname{Ker} f^n$.)

7. Sean N y N' dos submódulos de un A-módulo M tales que $M = N' + N$. Probar que M es un A-módulo noetheriano si y sólo si N y N' son A-módulos noetherianos.

8. Sean N y N' dos submódulos de un A-módulo M tales que $0 = N' \cap N$. Probar que M es un A-módulo noetheriano si y sólo si M/N y M/N' son A-módulos noetherianos.

9. Sea M un A-módulo noetheriano y N un A-módulo de tipo finito. Probar que $\operatorname{Hom}_A(N, M)$ es un A-módulo noetheriano.

10. Sea A un anillo noetheriano. Probar que $\mathrm{r}(A)^n = 0$ para algún exponente n.

    Si I es un ideal de A, probar que $\mathrm{r}(I)^n \subseteq I$ para algún exponente n.

11. ¿Es noetheriano el anillo $\prod_\infty \mathbb{Z}$?

12. Sea $X = \operatorname{Spec} A$ una variedad algebraica afín íntegra sobre un cuerpo k. Probar que $A = \bigcap_{x\in X} A_x$ donde la intersección se toma en el cuerpo Σ_X de funciones racionales sobre X. (*Indicación*: Si una función racional g/f está en todos los anillos locales A_x, probar que $fA \subseteq gA$ localizando en los puntos de X).

13. Demostrar que cualquier sistema de n generadores de un A-módulo libre de rango n forman una base. (*Indicación*: Aplicar el lema de Nakayama al núcleo del epimorfismo $A^n \to A^n$ para demostrar que es nulo).

14. Se dice que un espacio topológico X es *noetheriano* si toda sucesión estrictamente decreciente de cerrados de X es finita. Probar las siguientes afirmaciones:

    a) Todo espacio noetheriano es compacto.

    b) Todo subespacio de un espacio noetheriano es noetheriano.

    c) Todo espacio noetheriano es unión finita de subespacios irreducibles, y tiene un número finito de componentes irreducibles (*Indicación:* Si un espacio X no es unión finita de cerrados irreducibles, probar que algún cerrado propio tiene también tal propiedad.)

    d) El espectro de cualquier anillo noetheriano es un espacio topológico noetheriano. Concluir que todo anillo noetheriano tiene un número finito de ideales primos minimales.

15. Probar que un espacio topológico es noetheriano precisamente cuando todos sus abiertos son compactos.

16. Dar un ejemplo de un anillo no noetheriano A tal que su espectro sea un espacio topológico noetheriano.

17. Probar que el soporte $\operatorname{Sop}(M)$ de un A-módulo noetheriano es un subespacio cerrado noetheriano de $\operatorname{Spec} A$.

18. Sea $\{U_{f_i}\}$ un recubrimiento de $\operatorname{Spec} A$ por abiertos básicos. Probar que un A-módulo M es noetheriano si y sólo si M_{f_i} es un A_{f_i}-módulo noetheriano para todo índice i.

19. Hallar un generador del ideal maximal del anillo local de la curva plana compleja $y^2 = x^2 + x^3$ en el punto $(-1, 0)$. Análogamente en los puntos $(1, -\sqrt{2})$, $(1, \sqrt{2})$, $(-2, -2i)$.

20. Sea $\mathcal{O}$ el anillo local en el origen del plano afín sobre un cuerpo k. Determinar si el ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{O}$ está generado por $x + y + x^2$, $x + y^3$. Análogamente para $1 + x + y^4$, $x + y^2$ y para $x/(1 - y + x^2)$, $y/(2 + x - y)$.

    Hallar la primera potencia de $\mathfrak{m}$ que está contenida en el ideal $(y - x^2, xy)$. Análogamente para los ideales
$$(x^2 + y^2 - 2y, y + x^2)\ ,\quad \big(x/(1 + y), (x + y^2)/(1 - x)\big)$$

21. Probar que la función x genera el ideal maximal $\mathfrak{m}$ del anillo local en el origen de la curva plana compleja $y = x^2 + y^3$. Determinar la potencia de $\mathfrak{m}$ que genera cada una de las funciones y, $y + x^2y$, $y - x^2$, $xy - x^3$ sobre tal curva.

22. Sea X una variedad algebraica afín íntegra. Si dos morfismos de X en otra variedad algebraica afín coinciden en un abierto no vacío de X, probar que coinciden en X.

23. Sea $k \hookrightarrow K$ una extensión finita de cuerpos y $X = \operatorname{Spec} A$ una k-variedad algebraica. Probar que el morfismo natural $X_K = \operatorname{Spec} A \otimes_k K \to X = \operatorname{Spec} A$ de cambio de base es epiyectivo y cerrado.

24. Sea A un anillo íntegro y $a \in A$ no invertible, ni nula. Probar que el morfismo de localización $A \to A_a$ no es finito.

25. Sea $\pi\colon X = \operatorname{Spec} A \to \mathbb{A}^1 = \operatorname{Spec} k[x]$ un morfismo finito y supongamos que X es una variedad algebraica íntegra (de dimensión 1). Probar que el número de puntos (contando multiplicidades) de las fibras de π es constante.

26. Sea I un ideal de un anillo noetheriano. Probar que $I = r(I)$ si y sólo si I es intersección de un número finito de ideales primos.

27. Calcular los ideales maximales de $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ y $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]/(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)$.

28. Probar que si X e Y son variedades algebraicas íntegras sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado, entonces $X \times_k Y$ es íntegra. (Indicación: Usar el teorema de los ceros de Hilbert).

29. Sea $X = \operatorname{Spec} A$ una variedad íntegra sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado. Probar que para toda extensión $k \to K$, la variedad $X_K = \operatorname{Spec} A \otimes_k K$ es íntegra. (Póngase K unión de álgebras finito generadas).

30. Sea $\bar{k}$ el cierre algebraico de k. Probar que dos ideales primos $\mathfrak{p} = (f_i)_{i \in I}$, $\mathfrak{q} = (g_j)_{j \in J}$ de $k[x_1, \ldots, x_n]$ son iguales si y sólo si las soluciones en $\bar{k}$ de los dos sistemas de ecuaciones $\{f_i = 0\}$, $\{g_j = 0\}$ son las mismas.

31. Sean X, Y variedades algebraicas íntegras sobre un cuerpo k y sean Σ_X, Σ_Y sus respectivos cuerpos de funciones racionales. Si $\phi\colon Y \to X$ es un morfismo que transforma el punto genérico de Y en el punto genérico de X (lo que equivale a que tenga imagen densa), induce un morfismo de k-álgebras $\Sigma_X \to \Sigma_Y$. Diremos que ϕ es un morfismo de *grado* n cuando Σ_Y sea una extensión finita

de grado n de Σ_X. Los morfismos de grado 1 se llaman morfismos birracionales. Diremos que X e Y son birracionalmente equivalentes si sus cuerpos de funciones racionales son extensiones de k isomorfas: $\Sigma_X \simeq \Sigma_Y$. Las variedades algebraicas birracionalmente equivalentes al espacio afín se llaman racionales. Es decir, una variedad algebraica sobre k es racional si su cuerpo de funciones racionales es isomorfo a un cuerpo de fracciones racionales $k(x_1, \dots, x_n)$ con coeficientes en k.

a) Sea C la cúbica plana $y^2 = x^2 + x^3$. El haz de rectas $y = tx$ define un morfismo birracional $\mathbb{A}^1 \to C$, $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$. Calcular el área del "ojo del lazo" definido por la curva $y^2 = x^2 + x^3$.

b) Sea C la cúbica plana $y^2 = x^3$. El haz de rectas $y = tx$ define un morfismo birracional $\mathbb{A}^1 \to C$, $x = t^2$, $y = t^3$.

32. Supóngase conocido el siguiente resultado:"Si $k \hookrightarrow K$ es una extensión finita de cuerpos de característica cero, entonces existe un $\xi \in K$ de modo que $K = k(\xi)$". Demostrar que toda variedad algebraica íntegra, sobre $\mathbb{C}$, es birracionalmente isomorfa a una hipersuperficie de un espacio afín.

33. Poner un ejemplo de variedad algebraica que sea la unión de dos componentes no disjuntas, una de dimensión 2, la otra de dimensión 1.

34. Sean $p(x, y)$ y $q(x, y)$ polinomios de $k[x, y]$ sin factores comunes. Demostrar que $k[x, y]/(p(x, y), q(x, y))$ es una k-álgebra finita.

35. Sea $\mathfrak{m} \subset k[x_1, \dots, x_n]$ un ideal maximal. Probar que $\mathfrak{m}$ está generado por n funciones ¿Puede estar generado por $n - 1$ funciones?

36. Calcular la dimensión de Krull de $\mathbb{C}[x, y, z]/(x^2 + y^2 + z^2 - 1, y^2 - x^3)$.

37. Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo de imagen densa entre variedades algebraicas irreducibles. Probar que el conjunto de puntos $y \in Y$ tales que la dimensión de Krull de $f^{-1}(y)$ es igual a $\dim X - \dim Y$ contiene un abierto no vacío de Y.

38. Sea $\bar{k}$ el cierre algebraico de k y $X = \operatorname{Spec} A$ una variedad algebraica. Establezcamos en $Esp\, A(\bar{k}) = \operatorname{Hom}_{k-alg}(A, \bar{k})$ la siguiente relación de equivalencia: $f \sim g$ si y sólo si existe un $h \in \operatorname{Aut}_{k-alg}(\bar{k})$ de modo que $f = h \circ g$. Probar que

$$Esp\, A(\bar{k})/\sim = \{\text{Conjunto de los puntos cerrados de } X\}$$

39. Sea Σ el cierre algebraico de $k(x_1, \dots, x_n)$ y $X = \operatorname{Spec} A$ una variedad algebraica de dimensión n. Establezcamos en $Esp\, A(\Sigma) = \operatorname{Hom}_{k-alg}(A, \Sigma)$ la siguiente relación de equivalencia: $f \sim g$ si y sólo si existe un $h \in \operatorname{Aut}_{k-alg}(\Sigma)$ de modo que $f = h \circ g$. Probar que

$$Esp\, A(\Sigma)/\sim = X$$

40. Sea

$$\begin{array}{l} p_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \cdots \\ p_r(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{array}$$

un sistema de ecuaciones algebraicas con coeficientes números racionales. Probar que el conjunto de soluciones complejas de este sistema, módulo las transformaciones inducidas por los automorfismos de cuerpos de $\mathbb{C}$, es igual a $\operatorname{Spec} \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]/(p_1, \dots, p_r)$.

Capítulo 3

Descomposición primaria en anillos noetherianos

3.1. Introducción

Llamemos variedad algebraica a la variedad de soluciones de un ideal. Un primer resultado inmediato de la teoría de variedades algebraicas es que una variedad V es irreducible, es decir, no es unión propia de dos variedades algebraicas, si y sólo si el ideal de todas las funciones que se anulan en V es un ideal primo. En general, toda variedad algebraica V es unión de un número finito de variedades algebraicas irreducibles. En términos de ideales, todo ideal radical es intersección de un número finito de ideales primos.

Puede parecernos que dado un ideal I es siempre mejor considerar $r(I)$ en vez de I. Pongamos un ejemplo sencillo en el que nos interese el ideal I: Consideremos el ideal $(x, y^2 - x)$ o el sistema

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y^2 - x &= 0 \end{aligned}$$

la variedad de soluciones de este sistema es el punto $x = 0, y = 0$. Tenemos que $I = (x, y^2 - x) = (x, y^2)$ y $r(I) = (x, y)$. Podemos pensar la variedad de soluciones dada, como el conjunto de puntos de corte de la recta $x = 0$ con la parábola $y^2 - x = 0$, y como esta recta es tangente a la parábola nos gustaría afirmar que la variedad de soluciones es "el origen contado dos veces". De esta afirmación "queda rastro" en el ideal I pero no en $r(I)$. En conclusión, cuando estudiamos el sistema de ecuaciones definido por I, si consideramos sólo el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones (o equivalentemente, consideramos sólo $r(I)$) perdemos información que puede ser esencial, sobre todo en una teoría fina de intersección de variedades.

El ideal $(x, y^2 - x)$ es el ideal de polinomios p tales que $p(0,0) = 0$ y $\frac{\partial p}{\partial y}(0,0) = 0$, que hemos expresado de modo más impreciso como ideal de funciones que se anulan dos veces en el origen. En general, demostraremos que los ideales I son los ideales de polinomios que se anulan en ciertas variedades irreducibles y cumplen ciertas condiciones infinitesimales (no preciso este concepto) a lo largo de estas variedades irreducibles. Si llamamos ideal primario al ideal de funciones que se anula en una variedad irreducible y cumple ciertas condiciones infinitesimales a lo largo de ella, el resultado fundamental de la teoría de descomposiciones primarias afirma que todo ideal es intersección de un número finito de ideales primarios. En conclusión, dar un sistema de ecuaciones algebraicas equivale a dar un número finito de variedades algebraicas irreducibles y condiciones infinitesimales a lo largo de ellas. Euclides se habría sorprendido si hubiese sabido que su Teorema de Euclides era la punta del iceberg de un teorema geométrico.

3.2. Ideales primarios. Interpretación geométrica

Queremos demostrar que todo ideal de un anillo noetheriano viene definido por condiciones infinitesimales en un número finito de puntos del espectro. Desde el punto de vista aritmético, esto puede entenderse como el teorema de Euclides para anillos noetherianos. Comencemos con los ideales primarios que serán los definidos por condiciones infinitesimales en un punto.

1. Definición : Sea A un anillo. Un ideal $\mathfrak{q} \neq A$ es primario si todo divisor de cero de $A/\mathfrak{q}$ es nilpotente; es decir:

$$ab \in \mathfrak{q}\,,\ a \notin \mathfrak{q} \ \Rightarrow\ b^n \in \mathfrak{q} \text{ para algún } n \geq 1$$

2. Ejemplo : 1. Los ideales primos son primarios.

2. Si $p \in \mathbb{Z}$ es un número primo entonces (p^n) es un ideal primario de $\mathbb{Z}$. Igualmente si $p(x) \in k[x]$ es un polinomio irreducible entonces $(p(x)^n)$ es un ideal primario de $k[x]$

3. Definición : Dado un ideal $I \subseteq A$, llamaremos radical de I, y lo denotaremos $r(I)$, a

$$r(I) = \{a \in A \colon a^n \in I \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$$

Observemos que si $\pi \colon A \to A/I$ es el morfismo de paso al cociente, entonces el radical de I es la antimagen por π del radical de A/I. Por tanto, el radical de un ideal es la intersección de los ideales primos que lo contienen.

4. Proposición : *El radical de un ideal primario es un ideal primo.*

Demostración. En efecto, sea $\mathfrak{p}$ el radical de un ideal primario $\mathfrak{q}$. Si $ab \in \mathfrak{p}$ y $a \notin \mathfrak{p}$, entonces $(ab)^n \in \mathfrak{q}$ para algún $n \geq 1$ y $a^r \notin \mathfrak{q}$ para ningún r. Como $\mathfrak{q}$ es primario, alguna potencia de b^n ha de estar en $\mathfrak{q}$, luego $b \in \mathfrak{p}$. □

Sea $\mathfrak{q}$ un ideal primario. Diremos que $\mathfrak{q}$ es un ideal $\mathfrak{p}$-primario ó que $\mathfrak{p}$ es el ideal primo asociado a $\mathfrak{q}$ cuando $\mathfrak{p}$ es el radical de $\mathfrak{q}$. En tal caso, si $A' \to A$ es un morfismo de anillos, es sencillo comprobar que $A' \cap \mathfrak{q}$ es un ideal $(A' \cap \mathfrak{p})$-primario de A'.

5. Proposición : *Si $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal, entonces todo ideal de radical $\mathfrak{m}$ es primario. En particular, todas las potencias $\mathfrak{m}^n$ son ideales $\mathfrak{m}$-primarios.*

Demostración. Si I es un ideal de radical $\mathfrak{m}$, entonces $\mathfrak{m}$ es el único ideal primo que contiene a I. Por tanto, A/I tiene un único ideal primo, luego todo elemento de A/I es invertible o nilpotente; en particular, todo divisor de cero es nilpotente. □

Si el anillo A es noetheriano, cada ideal contiene una potencia de su radical, así que todo ideal $\mathfrak{m}$-primario es de la forma $\pi^{-1}(\bar{\mathfrak{q}})$ para algún ideal $\bar{\mathfrak{q}}$ de $A/\mathfrak{m}^r$ (donde $\pi \colon A \to A/\mathfrak{m}^r$ es el morfismo de paso al cociente). En el caso del anillo $A = \mathbb{C}\,[x_1, \ldots, x_n]$, si consideramos el ideal maximal $\mathfrak{m}$ formado por todos los polinomios que se anulan en cierto punto racional $(a_1, \ldots, a_n)$ y ponemos $t_i = x_i - a_i$, entonces

$$A/\mathfrak{m}^r = \mathbb{C}\,[t_1, \ldots, t_n]/(t_1, \ldots, t_n)^r = \begin{bmatrix} \text{Polinomios de grado} \\ < r \text{ en } t_1, \ldots, t_n \end{bmatrix}$$

y la reducción módulo $\mathfrak{m}^r$ de cualquier polinomio coincide con el clásico desarrollo de Taylor hasta el orden $r-1$ en el punto $(a_1,\dots,a_n)$. Por tanto, el ideal $\mathfrak{m}$-primario $\mathfrak{q}$ está formado por todas las funciones $f \in A$ cuyo desarrollo de Taylor $\bar f \in A/\mathfrak{m}^r$, en el punto definido por $\mathfrak{m}$, satisface las relaciones impuestas por cierto ideal $\bar{\mathfrak{q}}$ de $A/\mathfrak{m}^r$. Por ello diremos que los ideales primarios de radical maximal $\mathfrak{m}_x$ son los ideales definidos por condiciones infinitesimales en el punto cerrado x.

Una base del $\mathbb{C}$-espacio vectorial dual de $A/\mathfrak{m}^r$, la constituyen las formas lineales

$$\omega_\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1}x_1\cdots\partial^{\alpha_n}x_n}$$

con $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ y $|\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_n<r$, definidas por $\omega_\alpha(\bar f)=\frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial^{\alpha_1}x_1\cdots\partial^{\alpha_n}x_n}(a_1,\dots,a_n)$. Por tanto, todo ideal de $A/\mathfrak{m}^r$ está definido por un sistema de s-ecuaciones

$$\sum_{|\alpha|<r}\lambda_{i,\alpha}\omega_\alpha(\bar f)=0,\quad 1\le i\le s$$

Añadamos la ecuación redundante, $f(a_1,\dots,a_n)=0$. Es decir, los ideales $\mathfrak{m}$-primarios son ideales generados por las funciones f que verifican un sistema de s-ecuaciones

$$\begin{aligned}&\sum_{0<|\alpha|<r}\lambda_{i,\alpha}\tfrac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial^{\alpha_1}x_1\cdots\partial^{\alpha_n}x_n}(a_1,\dots,a_n)=0,\quad 1\le i\le s\\ &f(a_1,\dots,a_n)=0\end{aligned}$$

(variando $r,s,\lambda_{i,\alpha}$ se obtienen todos los ideales $\mathfrak{m}$-primarios).

Por tanto, cada ideal $\mathfrak{m}$-primario viene definido por ciertas relaciones entre las derivadas parciales iteradas en el punto $(a_1,\dots,a_n)$.

6. Proposición: *Sea S un sistema multiplicativo de un anillo A y sea $\mathfrak{q}$ un ideal $\mathfrak{p}_x$-primario.*

1. *Si $\mathfrak{p}_x$ corta a S, entonces $\mathfrak{q}A_S=A_S$.*
2. *Si $\mathfrak{p}_x$ no corta a S, entonces $\mathfrak{q}A_S$ es un ideal $\mathfrak{p}_xA_S$-primario y $\mathfrak{q}=A\cap(\mathfrak{q}A_S)$. En particular:*

$$\mathfrak{q}=A\cap(\mathfrak{q}A_x)$$

Por tanto, dos ideales $\mathfrak{p}_x$-primarios coinciden si coinciden al localizar en x.

Demostración. 1. Si $s\in S\cap\mathfrak{p}_x$, entonces $\mathfrak{q}$ contiene alguna s^n, que es invertible en A_S; luego $\mathfrak{q}A_S=A_S$.

2. Si $S\cap\mathfrak{p}_x=\emptyset$, entonces $\mathfrak{p}_xA_S$ es un ideal primo de A_S y es fácil comprobar que $\mathfrak{q}A_S$ es un ideal $\mathfrak{p}_xA_S$-primario. Por último, veamos que $\mathfrak{q}=A\cap(\mathfrak{q}A_S)$. Si $f\in A\cap(\mathfrak{q}A_S)$, entonces $sf\in\mathfrak{q}$ para algún $s\in S$. Ninguna potencia de s está en $\mathfrak{q}$, luego $f\in\mathfrak{q}$. Por tanto, $A\cap(\mathfrak{q}A_S)\subseteq\mathfrak{q}$. La inclusión contraria es evidente. □

Sea $\mathfrak{p}_x$ el ideal primo de un punto $x\in\operatorname{Spec}A$. Denotemos $\mathfrak{m}=\mathfrak{p}_xA_x$. Los ideales de A_x de radical $\mathfrak{m}$ son precisamente los ideales $\mathfrak{m}$-primarios, porque $\mathfrak{m}$ es maximal (estos ideales deben llamarse ideales de condiciones infinitesimales en el punto x, pues en el caso noetheriano vienen determinados por los ideales de los anillos $A_x/\mathfrak{m}^rA_x$). Por tanto, si $\mathfrak{q}$ es un ideal $\mathfrak{p}_x$-primario y A es noetheriano, existe un r y un ideal $\bar{\mathfrak{q}}$ de $A_x/\mathfrak{p}_x^rA_x$ tal que

$$\mathfrak{q}=\pi^{-1}(\bar{\mathfrak{q}})$$

siendo $\pi\colon A\to A_x/\mathfrak{p}_x^rA_x$ el morfismo natural. Recíprocamente, si $\mathfrak{q}=\pi^{-1}(\bar{\mathfrak{q}})$, entonces $\mathfrak{q}$ es un ideal $\mathfrak{p}_x$-primario.

7. Ejemplo : Si un ideal primo $\mathfrak{p}$ no es maximal, pueden existir ideales de radical $\mathfrak{p}$ que no son primarios. Fijemos en un plano afín un punto racional p y una recta r que pase por él. Sea $\mathfrak{m}_p$ el ideal maximal del punto y $\mathfrak{p}_r$ el ideal primo del punto genérico de la recta. Consideremos ahora el ideal $I = {\mathfrak{m}_p}^2 \cap \mathfrak{p}_r$, que son los polinomios que se anulan en la recta r y sus derivadas parciales se anulan en el punto fijado p. El radical de I es

$$r(I) = r({\mathfrak{m}_p}^2) \cap r(\mathfrak{p}_r) = \mathfrak{m}_p \cap \mathfrak{p}_r = \mathfrak{p}_r$$

pero el ideal I no es primario: si fuese primario sería $\mathfrak{p}_r$-primario. Al localizarlo en r, coincide con la localización de $\mathfrak{p}_r$ en r, por tanto I coincidiría con $\mathfrak{p}_r$, lo cual es falso.

Puede incluso darse el caso de que una potencia de un ideal primo no sea un ideal primario. Por ejemplo, sea $A = k[x, y, z]/(x^2 + y^2 - z^2)$ el anillo de las funciones algebraicas sobre un cono en $\mathbb{A}^3$ y sea $\mathfrak{p}_{gt} = (x, y - z)$ el ideal primo de A definido por una generatriz. El ideal ${\mathfrak{p}_{gt}}^2$ no viene definido por condiciones infinitesimales en el punto genérico de tal generatriz; es decir, ${\mathfrak{p}_{gt}}^2$ no coincide con $A \cap {\mathfrak{p}_{gt}}^2 A_{gt}$ sino que involucra además condiciones en el vértice del cono, pues las funciones de ${\mathfrak{p}_{gt}}^2$ deben cumplir además la condición de estar en $\mathfrak{m}^2$, donde $\mathfrak{m}$ denota el ideal maximal del vértice del cono. En efecto, la ecuación del plano tangente al cono a lo largo de la generatriz está en $A \cap {\mathfrak{p}_{gt}}^2 A_{gt}$ pero no está en ${\mathfrak{p}_{gt}}^2$ porque no pertenece a $\mathfrak{m}^2$. Luego el ideal ${\mathfrak{p}_{gt}}^2$ no es primario.

3.3. Existencia y unicidad de las descomposiciones primarias

1. Definición : Diremos que un ideal $\mathfrak{q}$ de un anillo A es <u>irreducible</u> si no es intersección de dos ideales estrictamente mayores; equivalentemente, si el ideal 0 de $A/\mathfrak{q}$ no es intersección de dos ideales no nulos.

2. Lema fundamental : *Sea A un anillo noetheriano. Todo ideal irreducible $\mathfrak{q} \neq A$ es primario.*

Demostración. Sea $\mathfrak{q}$ irreducible y sea $b \in A/\mathfrak{q}$ un divisor de cero. Sea $b\colon A/\mathfrak{q} \to A/\mathfrak{q}$ la homotecia de razón b. Se tiene que

$$0 \neq \operatorname{Ker} b \subseteq \operatorname{Ker} b^2 \subseteq \cdots \subseteq \operatorname{Ker} b^n \subseteq \cdots$$

Como $A/\mathfrak{q}$ es noetheriano, $\operatorname{Ker} b^n = \operatorname{Ker} b^{n+1}$ para algún n. Por tanto, $(\operatorname{Ker} b) \cap (\operatorname{Im} b^n) = 0$. Como $\mathfrak{q}$ es irreducible, debe ser $\operatorname{Ker} b = 0$ ó $\operatorname{Im} b^n = 0$. Por hipótesis $\operatorname{Ker} b \neq 0$, luego $\operatorname{Im} b^n = 0$ y por tanto b es nilpotente. □

3. Teorema de existencia : *Sea A un anillo noetheriano. Todo ideal $I \neq A$ es intersección finita de ideales irreducibles de A. Por tanto, todo ideal $I \neq A$ es intersección finita de ideales primarios de A.*

Demostración. Basta ver que si I no es irreducible entonces $I = I_1 \cap I'$ con I_1 irreducible e $I \underset{\neq}{\subset} I'$ (pues con I' se repite el argumento y así sucesivamente y se concluye por noetherianidad). Si I no es irreducible, entonces es intersección de ideales propios: $I = I_1 \cap J_1$. Si I_1 es irreducible hemos terminado; si no, $I_1 = I_{11} \cap I_{12}$, luego $I = I_{11} \cap I_{12} \cap J_1$. Si la inclusión $I \subset I_{12} \cap J_1$ es estricta, tomamos $I_2 = I_{11}, J_2 = I_{12} \cap J_1$; si no, tomamos $I_2 = I_{12}$, $J_2 = J_1$. En ambos casos obtenemos de nuevo que $I = I_2 \cap J_2$, con $I \underset{\neq}{\subset} J_2$, además $I_1 \underset{\neq}{\subset} I_2$. Así sucesivamente, el proceso es finito por noetherianidad, luego para cierto n, $I = I_n \cap J_n$ con I_n irreducible e $I \underset{\neq}{\subset} J_n$ por construcción. □

4. Definición : Sea I un ideal de un anillo A. Diremos que una descomposición $I = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$ como intersección de ideales primarios de A es una descomposición primaria reducida de I cuando no tenga componentes redundantes (i.e., no puede eliminarse ninguno de los $\mathfrak{q}_i$ en la igualdad) ni componentes asociadas a un mismo ideal primo ($r(\mathfrak{q}_i) \neq r(\mathfrak{q}_j)$ cuando $i \neq j$).

5. Proposición : *Si $\mathfrak{q}$ y $\mathfrak{q}'$ son dos ideales $\mathfrak{p}_x$-primarios entonces $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{q}'$ es $\mathfrak{p}_x$-primario.*

Demostración. Al lector. □

Si un ideal de un anillo puede descomponerse como intersección finita de ideales primarios, agrupando los términos de igual radical obtenemos una descomposición primaria en que todos los términos tienen radicales diferentes. Eliminando entonces términos redundantes, si los hubiera, se obtiene una descomposición primaria reducida. En conclusión, *si un ideal admite una descomposición primaria, entonces admite una descomposición primaria reducida*.

6. Teorema de unicidad de las componentes no-sumergidas : *Sea I un ideal de un anillo A y sea $\mathfrak{p}_x$ el ideal primo de las funciones que se anulan en una componente irreducible de $(I)_0$. Si $I = \bigcap_i \mathfrak{q}_i$ es una descomposición primaria reducida, entonces $\mathfrak{p}_x$ es el radical de una componente $\mathfrak{q}_i$ y*

$$\mathfrak{q}_i = A \cap (IA_x)$$

Por tanto, las componentes $\mathfrak{q}_i$ cuyos radicales son mínimos (entre los primos que contienen a I), son únicas.

Demostración. Escribamos $(I)_0 = C_1 \cup \cdots \cup C_r$ como unión de sus componentes irreducibles. Si escribimos $C_i = \bar{x}_i$, sabemos que $\mathfrak{p}_{x_1}, \ldots, \mathfrak{p}_{x_r}$ son los ideales primos mínimos conteniendo a I. Denotemos $r(\mathfrak{q}_i) = \mathfrak{p}_{y_i}$,

$$(I)_0 = (\mathfrak{q}_1)_0 \cup \cdots (\mathfrak{q}_n)_0 = (\mathfrak{p}_{y_1})_0 \cup \cdots \cup (\mathfrak{p}_{y_n})_0 = \bar{y}_1 \cup \cdots \bar{y}_n$$

Dado x_i existe un j tal que $x_i \in \bar{y}_j$, luego $\bar{x}_i \subset \bar{y}_j \subset (I)_0$. Por tanto, $\bar{x}_i = \bar{y}_j$ y $x_i = y_j$. En conclusión, los ideales primos $\{\mathfrak{p}_{y_1}, \ldots, \mathfrak{p}_{y_n}\}$ son ideales primos que contienen a I y contiene a los ideales mínimos que contienen a I.

Supongamos que $\mathfrak{p}_x$ es el radical de una componente $\mathfrak{q}_i$. Ahora, si $j \neq i$, entonces $\mathfrak{q}_j A_x = A_x$, porque $r(\mathfrak{q}_j)$ corta al sistema multiplicativo $A - \mathfrak{p}_x$. Por tanto

$$IA_x = \bigcap_{j=1}^{n} \mathfrak{q}_j A_x = \mathfrak{q}_i A_x$$

y, por 3.2.6, concluimos que $\mathfrak{q}_i = A \cap (\mathfrak{q}_i A_x) = A \cap (IA_x)$. □

Si $I = \cap_i \mathfrak{q}_i$ es una descomposición primaria reducida, las componentes $\mathfrak{q}_i$ cuyos radicales son mínimos se denominan componentes no sumergidas. Una componente $\mathfrak{q}_j$ está sumergida cuando sus ceros están contenidos estrictamente en los ceros de alguna otra componente: $(\mathfrak{q}_j)_0 \subset (\mathfrak{q}_i)_0$. Las componentes no-sumergidas corresponden a los puntos genéricos de las componentes irreducibles de $(I)_0$, mientras que las componentes sumergidas están asociadas a puntos más pequeños de $(I)_0$.

7. Corolario : *Si los ceros de un ideal I de un anillo noetheriano son puntos aislados, la descomposición primaria reducida de I es única salvo el orden.*

Las componentes sumergidas no son únicas pero sí lo son sus radicales, como vamos a demostrar.

Sea $a \in A$ e $I \subset A$ un ideal. Denotaremos

$$(I : a) = \{b \in A : a \cdot b \in I\}$$

8. Proposición : *Sea $\mathfrak{q} \subset A$ un ideal $\mathfrak{p}$-primario. Se verifica*

$$(\mathfrak{q}\colon a) = \begin{cases} A & \textit{si } a \in \mathfrak{q} \\ \mathfrak{q}' & \textit{si } a \notin \mathfrak{q} \end{cases}$$

siendo $\mathfrak{q}'$ un ideal $\mathfrak{p}$-primario que contiene a $\mathfrak{q}$.

Demostración. Es una sencilla comprobación. □

9. Teorema: *Sea A un anillo noetheriano. Sea $I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ una descomposición primaria reducida de I. Un ideal primo $\mathfrak{p}$ es un ideal primo asociado a un primario de la descomposición primaria de I si y sólo si existe $a \in A$ de modo que $(I\colon a) = \mathfrak{p}$.*

En particular, los primos asociados a una descomposición primaria reducida de un ideal son independientes de la descomposición.

Demostración. Observemos que $(I\colon a) = (\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i\colon a) = \bigcap_{i=1}^{n} (\mathfrak{q}_i\colon a)$. Por la proposición anterior, es fácil concluir que si $(I\colon a) = \mathfrak{p}$, entonces $\mathfrak{p}$ es un ideal primo asociado a la descomposición primaria.

Recíprocamente, supongamos $\mathfrak{p} = r(\mathfrak{q}_1)$. Sea $a \in \bigcap_{i=2}^{n} \mathfrak{q}_i$ y $a \notin \mathfrak{q}_1$; por la proposición anterior $(I\colon a) = (\mathfrak{q}_1\colon a)$ y es un ideal $\mathfrak{p}$-primario. Si $(\mathfrak{q}_1\colon a) \neq \mathfrak{p}$, sea $\mathfrak{p}^r$ la primera potencia contenida en $(\mathfrak{q}_1\colon a)$ y sea $b \in \mathfrak{p}^{r-1}$, $b \notin (\mathfrak{q}_1\colon a)$. Entonces $(I\colon ab) = \mathfrak{p}$. □

10. Definición : Sea A un anillo noetheriano. Llamaremos ideales primos asociados a un ideal I a los radicales de las componentes de cualquier descomposición primaria reducida de I.

Veamos ahora que los A-módulos $A/\mathfrak{p}_x$, $x \in \operatorname{Spec} A$, son los "ladrillos" de la categoría de los A-módulos noetherianos. El significado preciso viene dado por el siguiente teorema.

11. Teorema : *Sea M un A-módulo noetheriano. Existe una cadena de submódulos*

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$$

tal que $M_i/M_{i-1} \simeq A/\mathfrak{p}_i$, con $\mathfrak{p}_i$ primo.

Demostración. Sea m un elemento no nulo de M. Entonces, $A/\alpha \simeq \langle m \rangle \subset M$. Existe $\bar{a} \in A/\alpha$ cuyo anulador es $\mathfrak{p}_1$, siendo $\mathfrak{p}_1$ un primo asociado a α. Luego $A/\mathfrak{p}_1 \subset M$. Tomando $M_1 = A/\mathfrak{p}_1$ y repitiendo el argumento para M/M_1 se obtiene $A/\mathfrak{p}_2 \subset M/M_1$. Sea $M_2 = \pi^{-1}(A/\mathfrak{p}_2)$, siendo $\pi\colon M \to M/M_1$ el morfismo de paso al cociente; así sucesivamente se concluye por noetherianidad. □

Hasta ahora, hemos desarrollado la descomposición primaria de los ideales de un anillo noetheriano. De modo totalmente análogo podemos desarrollar la descomposición primaria en módulos noetherianos. Indiquemos la línea argumental y dejemos al lector las demostraciones.

12. Definición : Un submódulo $M' \subset M$ diremos que es primario, si los elementos del anillo que son divisores de cero en M/M' (es decir, la homotecia definida por el elemento tiene núcleo no trivial) son nilpotentes en M/M' (es decir, la homotecia definida es nilpotente).

13. Definición : Un submódulo $M' \subsetneq M$ diremos que es irreducible si no es intersección de dos submódulos estrictamente mayores de M.

14. Proposición : *Los submódulos irreducibles son primarios.*

15. Teorema : *Todo submódulo de un módulo noetheriano es intersección de un número finito de submódulos primarios.*

16. Proposición: *Si $M' \subset M$ es un submódulo primario, entonces el anulador de M/M' es un ideal primario.*

Si M' es un submódulo primario y $\mathfrak{p}$ es el radical del anulador de M/M', entonces diremos que M' es un submódulo $\mathfrak{p}$-primario.

17. Proposición: *Si M_1,M_2 son submódulos $\mathfrak{p}$-primarios entonces $M_1 \cap M_2$ es $\mathfrak{p}$-primario.*

Por tanto, existen descomposiciones primarias reducidas de los submódulos de un módulo noetheriano.

Dados $m \in M$ y $M' \subset M$, denotaremos $(M'\colon m) = \{a \in A\colon am \in M'\}$.

18. Proposición: *Sea $M' \subset M$ un submódulo primario. Sea $\mathfrak{q}$ el anulador de M/M' y $\mathfrak{p}$ el radical de $\mathfrak{q}$. Se verifica*

$$(M'\colon m) = \begin{cases} A & si\ a \in M' \\ \mathfrak{q}' & si\ a \notin M' \end{cases}$$

siendo $\mathfrak{q}'$ un ideal $\mathfrak{p}$-primario, que contiene a $\mathfrak{q}$.

19. Proposición: *Sea $M' = M_1 \cap \cdots \cap M_n$ una descomposición primaria reducida de M'. Un ideal primo $\mathfrak{p}$ es un ideal primo asociado a la descomposición primaria de M' si y sólo si existe $m \in M$ tal que $(M'\colon m) = \mathfrak{p}$.*

20. Teorema de unicidad de las componentes no-sumergidas: *Sea M' un submódulo de un módulo noetheriano M y $M' = M_1 \cap \cdots \cap M_n$ una descomposición primaria reducida. Sea $\mathfrak{p}_x$ un ideal primo minimal entre los ideales primos asociados a la descomposición primaria de M'. Entonces*

$$M_i = M \cap M'_x$$

21. Ejercicio: Probar que los ideales primos minimales asociados a un submódulo M' de un módulo noetheriano M, coinciden con los ideales primos minimales asociados al ideal anulador de M/M'.

3.4. Una descomposición primaria canónica

1. Proposición: *Sea $I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ una descomposición primaria reducida y $\mathfrak{p}_x$ un primo asociado. Denotemos por J la intersección de los $\mathfrak{q}_i$ contenidos en $\mathfrak{p}_x$. Entonces*

$$J = A \cap I_x$$

Por tanto, el ideal J no depende de la descomposición primaria escogida.

Demostración. Se deduce de la Proposición 3.2.6 □

2. Corolario: *Sean $I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n = \mathfrak{q}'_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}'_n$ dos descomposiciones primarias reducidas de primos asociados $r(\mathfrak{q}'_i) = r(\mathfrak{q}_i) = \mathfrak{p}_{x_i}$. Se verifica*

$$I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{j-1} \cap \mathfrak{q}'_j \cap \mathfrak{q}_{j+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$$

para todo j. En consecuencia, si $\mathfrak{q}''_i$ son ideales $\mathfrak{p}_{x_i}$-primarios, y cada uno de ellos aparece en alguna descomposición primaria de I, entonces

$$I = \mathfrak{q}''_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}''_n$$

Demostración. Reordenado, podemos suponer que $\mathfrak{q}_i \subseteq \mathfrak{p}_{x_j} \Leftrightarrow i \leq j$. Por la proposición anterior $\mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{j-1} = \mathfrak{q}'_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}'_{j-1}$ para todo j. Por tanto,

$$\mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{j-1} \cap \mathfrak{q}'_j = \mathfrak{q}'_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}'_{j-1} \cap \mathfrak{q}'_j = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_j$$

Cortando con $\mathfrak{q}_{j+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ concluimos. □

3. Proposición : *Sea A un anillo noetheriano. Sea $I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_m \subset A$ una descomposición primaria reducida de radicales $\mathfrak{p}_{x_i}$. Sea $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{p}_{x_i}^{n_i} \subseteq \mathfrak{q}_i$ y denotemos $\alpha_i^{n_i}$ el ideal $\mathfrak{p}_{x_i}$-primario antimagen de $(I_{x_i} + \mathfrak{p}_{x_i}^{n_i}) \cdot A_{x_i}$ por el morfismo de localización $A \to A_{x_i}$. Entonces*

$$I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \alpha_i^{n_i} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_m$$

Demostración. Denotemos por J la intersección de los $\mathfrak{q}_j$ distintos de $\mathfrak{q}_i$. Como $I \subseteq \alpha_i^{n_i} \subseteq \mathfrak{q}_i$,

$$I = I \cap J \subseteq \alpha_i^{n_i} \cap J \subseteq \mathfrak{q}_i \cap J = I$$

luego las inclusiones son igualdades y concluimos.

□

El ideal $\alpha_i^{n_i}$ es el ideal de funciones de A cuyo desarrollo de Taylor de orden n_i en x_i coincide con el desarrollo de Taylor de orden n_i en x_i de alguna función de I.

Procedamos a ver que entre las descomposiciones primarias de I hay una canónica. Siguiendo las notaciones anteriores, para cada i, sea n_i el mínimo tal que $\alpha_i^{n_i}$ aparezca en alguna descomposición primaria de I. Entonces

$$I = \alpha_1^{n_1} \cap \cdots \cap \alpha_m^{n_m}$$

Demos un método de cálculo. Procedemos recurrentemente. Dado $\mathfrak{p}_{x_j}$, supongamos que ya tenemos calculados los $\alpha_i^{n_i}$, para todo $\mathfrak{p}_{x_i}$ contenido en $\mathfrak{p}_{x_j}$. Reordenando, supongamos que son $\alpha_1^{n_1}, \ldots, \alpha_{j-1}^{n_{j-1}}$. Entonces n_j es el mínimo número natural tal que $\alpha_1^{n_1} \cap \cdots \cap \alpha_{j-1}^{n_{j-1}} \cap \mathfrak{p}_{x_j}^{n_j} \subseteq I_{x_j}$.

Así sucesivamente vamos determinando los n_j y obteniendo la descomposición primaria canónica

$$I = \alpha_1^{n_1} \cap \cdots \cap \alpha_m^{n_m}$$

Del mismo modo obtenemos descomposiciones primarias canónicas para los submódulos de un módulo noetheriano. Las demostraciones de las siguientes proposiciones se pueden copiar de sus equivalentes en el caso de ideales.

4. Proposición : *Sea M' un submódulo del módulo noetheriano M, $M' = M_1 \cap \cdots \cap M_n$ una descomposición primaria reducida, y $\mathfrak{p}_x$ un primo asociado. Sea M'' la intersección de los M'_i cuyos primos asociados están contenidos en $\mathfrak{p}_x$. Entonces*

$$M'' = M \cap M'_x$$

Por tanto, M'' no depende de la descomposición primaria escogida.

5. Corolario : *Sean $M' = M_1 \cap \cdots \cap M_n = N_1 \cap \cdots \cap N_n$ dos descomposiciones primarias reducidas, de primos asociados $\mathfrak{p}_{x_i}$. Se verifica que*

$$M' = M_1 \cap \cdots \cap M_{j-1} \cap N_j \cap M_{j+1} \cap \cdots \cap M_n$$

para todo j. En consecuencia, si $\{L_i\}_{1\leq i\leq n}$ son submódulos $\mathfrak{p}_{x_i}$-primarios y cada uno de ellos aparece en alguna descomposición primaria de M', entonces

$$M' = L_1 \cap \cdots \cap L_n$$

6. Proposición: *Sea M' un submódulo de un A-módulo noetheriano M. Sea $M' = M_1 \cap \cdots \cap M_m$ una descomposición primaria reducida de primos asociados $\mathfrak{p}_{x_i}$. Sea $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{p}_{x_i}^{n_i}$ está contenido en el anulador de M/M_i. Denotemos por N_i el submódulo $\mathfrak{p}_{x_i}$-primario antimagen de $({M'}_{x_i} + \mathfrak{p}_{x_i}^{n_i})M_{x_i}$ por el morfismo de localización $M \to M_{x_i}$. Entonces*

$$M' = M_1 \cap \cdots \cap N_i \cap \cdots \cap M_m$$

Ahora, argumentando como en el caso de los ideales, obtendremos una descomposición primaria canónica de M'.

3.5. Problemas

1. Probar que si A es un anillo íntegro entonces (0) es irreducible. Probar que los ideales primos son irreducibles.

2. Sea $A = k[x,y]/(x,y)^2$. Escribir el ideal (0) como intersección de ideales irreducibles ¿Es el ideal (0) un ideal primario?

3. Sea A un anillo noetheriano e $I \subsetneq A$ un ideal. Si I no es irreducible, sean I_1 e I_2 dos ideales que contienen estrictamente a I tales que $I = I_1 \cap I_2$. Repitiendo este proceso con I_1 e I_2 y así sucesivamente, probar que este proceso termina en un número finito de pasos, obteniéndose I como intersección de un número finito de ideales irreducibles.

4. Probar que en $k[x,y]$ se cumple que $(x) \cap (x,y)^2 = (x) \cap (y, x^2)$ ¿Son las descomposiciones primarias únicas?

5. Sea $\mathfrak{m} \subset A$ un ideal maximal y $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$ un ideal primo tal que $\mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{m}^2$ ¿Puede ser $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{m}^2$ un ideal primario?

6. Calcular la descomposición primaria de $60 \cdot \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$.

7. Probar que los ideales primos asociados al ideal cero de un anillo noetheriano A, son los ideales primos de A que coinciden con el anulador de algún elemento de A.

8. Sea $\mathfrak{a}$ un ideal con ceros aislados de un anillo noetheriano A y sea $\mathfrak{a} = \mathfrak{q} \cap \ldots$ una descomposición primaria reducida de $\mathfrak{a}$. Sea $\mathfrak{m}_x$ el radical de $\mathfrak{q}$. Probar que $\mathfrak{q} = \mathfrak{a} + {\mathfrak{m}_x}^r$ para algún exponente $r \geq 1$. De hecho, podemos tomar r como el exponente de la primera potencia de $\mathfrak{m}_x A_x$ que esté contenida en $\mathfrak{a}A_x$. Además, ${\mathfrak{m}_x}^r A_x \subseteq \mathfrak{a}A_x$ precisamente cuando $\overline{\mathfrak{m}_x}^r \subseteq \bar{\mathfrak{a}} \subset A/\mathfrak{m}_x^{r+1}$.

9. Calcular la descomposición primaria de $I = (xy, -y + x^2 + y^2)$ en $\mathbb{C}[x,y]$.

10. Calcular una descomposición primaria reducida de los ideales

    a) $I = (x,y) \cdot (x, y-1)$ en $\mathbb{C}[x,y]$.

    b) $I = (x) \cdot (x,y) \cdot (x, y-1)$ en $\mathbb{C}[x,y]$.

11. Hallar la descomposición primaria del ideal generado en $\mathbb{C}[x,y]$ por las ecuaciones de:

    a) Un par de rectas y una recta.

    b) Una recta doble y una recta.

    c) Una cónica no singular y una recta.

    d) Una cónica no singular y un par de rectas.

    e) Una cónica no singular y una recta doble.

12. Calcular la multiplicidad de intersección en el origen de la curva $y^2 = x^2 + y^3$ con la curva $y^3 + x^2 = 0$. Es decir, calcular $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[x,y]/(y^2 - x^2 - y^3, y^3 + x^2))_{or}$, donde *or* es el origen.

13. Determinar si los siguientes sistemas de ecuaciones con coeficientes racionales son equivalentes al sistema $x^2 + y^2 = 1$, $x^2y^2 = 0$:

$$\begin{cases} 1 = x^2 + y^2 \\ x^4 = x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 = x^2 - y^2 \\ 0 = x^2y^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 = x^2 - y^2 \\ 1 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = x^2 + y^2 \\ 0 = (x+y+1)^2(x+y-1)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 = x^2 + y^2 \\ 0 = (x+y+1)^2(x+y-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = x^2 + y^2 \\ 0 = (x+y+1)(x+y-1)(x-y+1)(x-y-1) \end{cases}$$

14. En la curva plana compleja de ecuación $x^2 + y^2 = 9$, determinar si la función $f(x,y) = (y-3)(x-5)$ divide a la función $g(x,y) = x(y^2 - 16)$ ¿divide $f(x,y)$ a alguna potencia de $g(x,y)$? ¿y si sustituimos el cuerpo de los números complejos por el de los números racionales?

Capítulo 4

Variedades proyectivas

4.1. Introducción

En Geometría Lineal el marco "afín" pronto se muestra excesivamente estrecho y es necesario la introducción de los espacios proyectivos. Lo mismo sucede en Geometría Algebraica, donde habrá que introducir el concepto de variedad proyectiva. Por poner un ejemplo de esta necesidad, digamos que el teorema de Bézout, que afirma que dos curvas planas de grados n y m, se cortan en $n \cdot m$ puntos, es un enunciado en el plano proyectivo, pues es necesario para la validez de este teorema considerar los puntos del infinito.

Del modo más simple, podemos decir que la Geometría Algebraica es el estudio de las soluciones de un sistema de ecuaciones polinómicas en un espacio proyectivo, es decir, el estudio de las variedades algebraicas proyectivas.

En Geometría Lineal el espacio proyectivo de dimensión n se define como el conjunto de rectas (que pasan por el origen) de un espacio vectorial de dimensión $n+1$. En Geometría Algebraica vamos a definir de modo equivalente, a partir de $\mathbb{A}^{n+1} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$, el espacio proyectivo n-dimensional. Las subvariedades V que vamos a considerar en $\mathbb{A}^{n+1}$ son las variedades homogéneas, es decir, las que contengan para todo punto cerrado $p \in V$ la recta que pasa por p y el origen. Así, las subvariedades homogéneas de dimensión mínima serán las rectas que pasan por el origen, que se corresponderán con los puntos cerrados del espacio proyectivo que queremos asociarle a $\mathbb{A}^{n+1}$.

Si $p(x_0, \ldots, x_n) \in k[x_0, \ldots, x_n]$ es una función que se anula en la variedad homogénea V, escribamos $p(x_0, \ldots, x_n) = p_s(x_0, \ldots, x_n) + \cdots + p_m(x_0, \ldots, x_n)$ como suma de polinomios homogéneos. Si $(a_0, \ldots, a_n)$ es un punto de V, entonces también lo es $(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n)$, luego

$$0 = p(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) = \lambda^s p_s(a_0, \ldots, a_n) + \cdots + \lambda^m p_m(a_0, \ldots, a_n), \quad \text{para todo } \lambda$$

Por tanto, $p_i(a_0, \ldots, a_n)$ se anula en V, para todo i. En conclusión, $V = (I)_0$, donde I es un ideal generado por polinomios homogéneos. Es fácil ver el recíproco, es decir, si $V = (I)_0$ donde I es un ideal generado por polinomios homogéneos, entonces V es una variedad homogénea.

Denotaremos por $\mathbb{P}^n = \operatorname{Proj} \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ el conjunto de ideales primos homogéneos (= generados por polinomios homogéneos) de $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$.

Si consideramos en $\mathbb{P}^n$ la topología inducida por $\mathbb{A}^{n+1}$, entonces los puntos cerrados de $\mathbb{P}^n$ se corresponden con las variedades homogéneas de $\mathbb{A}^{n+1}$ de dimensión mínima, que son justamente las rectas de $\mathbb{A}^{n+1}$ que pasan por el origen.

En Geometría Proyectiva se demuestra que $\mathbb{P}^n$ está recubierto por los subconjuntos $U_i = \{$rectas de $\mathbb{C}^{n+1}$ que pasan por el origen y no yacen en el hiperplano $x_i = 0\}$ y que éstos se corresponden con los puntos del espacio afín $\mathbb{A}^n$, del modo siguiente: El morfismo

$$\mathbb{A}^{n+1} - \{x_i = 0\} \to \mathbb{A}^n,\ (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \mapsto (\frac{\alpha_0}{\alpha_i}, \dots, \frac{\alpha_n}{\alpha_i})$$

tiene por fibras las rectas que pasan por el origen y no yacen en el hiperplano $x_i = 0$, es decir, induce la igualdad

$$\begin{tikzcd} U_i = \{\text{rectas } \lambda(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_i \neq 0\} \arrow[r, equal] & \mathbb{A}^n \\ \lambda(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \arrow[r, mapsto] & (\frac{\alpha_0}{\alpha_i}, \dots, \frac{\alpha_n}{\alpha_i}) \end{tikzcd}$$

En Álgebra Conmutativa, veremos que el conjunto $U_i = \{x \in \operatorname{Proj} \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ que no yacen en $(x_i)_0\}$ se identifica con $\operatorname{Proj} \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_{x_i}$ (se dota a $\frac{1}{x_i}$ de grado -1), y la composición de los morfismos

$$\begin{tikzcd} U_i \arrow[r, hook] & \mathbb{A}^{n+1} - (x_i)_0 \arrow[r] & \mathbb{A}^n \\ & (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \arrow[r, mapsto] & (\frac{\alpha_0}{\alpha_i}, \dots, \frac{\alpha_n}{\alpha_i}) \\ & \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_{x_i} & \mathbb{C}[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}] \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

induce un homeomorfismo $U_i = \operatorname{Proj} \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_{x_i} \simeq \operatorname{Spec} \mathbb{C}[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}]$. Además se prueba que $\mathbb{P}^n = \underset{i}{\cup} U_i$.

4.2. Espectro proyectivo

Procedamos ahora con todo rigor y generalidad.

1. Definición : Diremos que un anillo $R = \underset{n \in \mathbb{Z}}{\oplus} R_n$ es un álgebra graduada, si los R_i son subgrupos de R con la suma y si para cada $r_i \in R_i$ y $r_j \in R_j$, entonces $r_i \cdot r_j \in R_{i+j}$. Diremos que $r_i \in R_i$ es un elemento homogéneo de grado i.

2. Definición : Sea $R = \underset{n \in \mathbb{Z}}{\oplus} R_n$ un álgebra graduada. Diremos que un ideal $I \subset R$ de un álgebra graduada es homogéneo, si está generado por elementos homogéneos.

3. Ejercicio : Probar que un ideal $I \subseteq R$ es homogéneo si y sólo si $I = \underset{n}{\oplus} I_n$, siendo $I_n = I \cap R_n$.

4. Definición : Llamaremos ideal irrelevante de R al ideal $(\underset{n \neq 0}{\oplus} R_n)$.

5. Definición : Llamaremos espectro proyectivo de R, y lo denotaremos $\operatorname{Proj} R$, al conjunto de ideales primos homogéneos de R que no contienen al ideal irrelevante.

Evidentemente $\operatorname{Proj} R \subset \operatorname{Spec} R$. Consideraremos $\operatorname{Proj} R$ como espacio topológico con la topología inicial heredada de la topología de Zariski de $\operatorname{Spec} R$. Si denotamos $(f)_0^h$ a los ideales primos homogéneos que contienen a $f \in R$ y escribimos $f = f_n + f_{n+1} \cdots + f_m$, es obvio que $(f)_0^h = (f_n, \dots, f_m)_0^h = (f_n)_0^h \cap \dots \cap (f_m)_0^h$. Por tanto, una base de abiertos de la topología de $\operatorname{Proj} R$ son los abiertos

$$U_f^h = \{x \in \operatorname{Proj} R, f \notin \mathfrak{p}_x\}, \quad (f \text{ homogéneo})$$

6. Definición : Llamaremos espacio proyectivo de dimensión n (sobre k) a

$$\mathbb{P}_k^n = \operatorname{Proj} k[x_0, \dots, x_n]$$

7. Definición : Diremos que un morfismo de álgebras $\phi\colon R \to R'$ graduadas es un morfismo graduado de grado $m \in \mathbb{N}$, si transforma funciones de grado n en funciones de grado $n \cdot m$.

Si $\phi\colon R \to R'$ es un morfismo graduado entonces el morfismo inducido $\phi^*\colon \operatorname{Spec} R' \to \operatorname{Spec} R$, aplica ideales primos homogéneos en ideales primos homogéneos. Si suponemos que la imagen del ideal irrelevante de R por ϕ, no está contenido en más ideal primo homogéneo que los que contengan al irrelevante de R', tenemos definido un morfismo

$$\phi^*\colon \operatorname{Proj} R' \to \operatorname{Proj} R, x \mapsto \phi^*(x), \text{ donde } \mathfrak{p}_{\phi*(x)} = \phi^{-1}(\mathfrak{p}_x)$$

8. Ejemplo : Sea $\phi\colon k[x_0, x_1, x_2] \to k[x_0, x_1, x_2]$, $\phi(x_i) = \sum\limits_j \lambda_{ij} x_j$, de modo que $\det(\lambda_{ij}) \neq 0$. Entonces ϕ es un isomorfismo graduado de grado 1, que induce un isomorfismo $\phi^*\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$. Diremos que ϕ es un cambio de coordenadas homogéneo.

Si $f \in R$ es un elemento homogéneo de grado m, entonces R_f es una álgebra graduada, diciendo que el grado de $\frac{g_n}{f^r}$ es $n - mr$, para cada $g_n \in R_n$. Dejamos que el lector demuestre la siguiente proposición.

9. Proposición :

1. *El morfismo de localización $R \to R_f$ (f homogénea) es un morfismo de grado 1 que induce un isomorfismo*

$$\operatorname{Proj} R_f = U_f^h = \operatorname{Proj} R - (f)_0^h$$

2. *Si I es un ideal homogéneo de R entonces R/I es un álgebra graduada homogénea, de modo que el morfismo $R \to R/I$ es un morfismo graduado de grado 1 que induce un isomorfismo*

$$\operatorname{Proj}(R/I) = (I)_0^h$$

Dada un álgebra graduada R denotaremos por R_0 a la subálgebra de R formada por los elementos de grado cero.

Por sencillez, supondremos a partir de ahora que $R = R_0[\xi_0, \dots, \xi_n]$, donde cada ξ_i es de grado 1.

10. Teorema : *Sea $R = R_0[\xi_0, \dots, \xi_n]$. Denotemos U_i al abierto básico* $\operatorname{Proj} R - (\xi_i)_0^h$. *Entonces*

1. $\operatorname{Proj} R = \bigcup\limits_{i=0}^n U_i$.

2. *U_i es homeomorfo a* $\operatorname{Spec} R_0[\frac{\xi_0}{\xi_i}, \dots, \frac{\xi_n}{\xi_i}]$.

Diremos que U_i es un abierto afín de $\operatorname{Proj} R$. *Por tanto, el espectro proyectivo admite un recubrimiento por abiertos afines.*

Demostración. 1. $\operatorname{Proj} R = \bigcup\limits_{i=0}^n U_i$, ya que $\bigcap\limits_{i=0}^n (\xi_i)_0^h = (\xi_0, \dots, \xi_n)_0^h = \emptyset$, pues $(\xi_0, \dots, \xi_n)$ es el ideal irrelevante.

2. $R_0[\xi_0/\xi_i,\ldots,\xi_n/\xi_i]$ es por definición el subanillo obvio de R_{ξ_i}. La composición de los morfismos naturales

$$\operatorname{Proj} R_{\xi_i} \hookrightarrow \operatorname{Spec} R_{\xi_i} \to \operatorname{Spec} R_0[\xi_0/\xi_i,\ldots,\xi_n/\xi_i]$$

es el homeomorfismo buscado. En efecto, dicha aplicación transforma un ideal primo homogéneo $\mathfrak{p}$ de R_{ξ_i} en el ideal primo $\mathfrak{p}\cap R_0[\xi_0/\xi_i,\ldots,\xi_n/\xi_i]$; es claro que todo primo homogéneo $\mathfrak{p}$ de R_{ξ_i} está determinado por sus elementos homogéneos de grado cero, es decir, por $\mathfrak{p}\cap R_0[\xi_0/\xi_i,\ldots,\xi_n/\xi_i]$, luego la aplicación es inyectiva. Además, es fácil comprobar que si $\mathfrak{p}'$ es un ideal primo de $R_0[\xi_0/\xi_i,\ldots,\xi_n/\xi_i]$, entonces $\mathfrak{p}'R_{\xi_i}$ es un ideal primo homogéneo de R_{ξ_i}, y esta es la asignación inversa. Finalmente, si $f\in R$ es homogénea de grado n, la biyección anterior transforma $(f)_0^h=(f/\xi_i^n)_0^h$ en $(f/\xi_i^n)_0$. Es decir, es un homeomorfismo.

□

Si C es un cerrado de $\operatorname{Proj} R$, entonces $C=(J)_0^h$, donde podemos suponer que J es un ideal homogéneo de R; de hecho el ideal I de todas las funciones de R que se anulan en C es homogéneo y $C=(I)_0^h$. Si C es irreducible, entonces $I=\mathfrak{p}_x$ es primo (y homogéneo) y C es el cierre de x en $\operatorname{Proj} R$.

Todo subespacio de un espacio noetheriano es noetheriano. Por tanto, si $R=k[\xi_0,\ldots,\xi_n]$ entonces $\operatorname{Proj} R\subseteq \operatorname{Spec} R$, es un espacio noetheriano. En particular, $\operatorname{Proj} R$ es unión de un número finito de cerrados irreducibles, luego $\operatorname{Proj} R=\bar{x}_1\cup\cdots\cup\bar{x}_r$, siendo $\mathfrak{p}_{x_1},\ldots,\mathfrak{p}_{x_r}$ los ideales primos homogéneos minimales de R.

4.3. Dimensión en variedades proyectivas

1. Definición: Llamaremos dimensión de $\operatorname{Proj} R$ al máximo de las longitudes de sus cadenas de cerrados irreducibles, que coincide con el máximo de las longitudes de las cadenas de ideales primos homogéneos de R que no contengan al ideal irrelevante.

Si $\bar{x}_1\supset\cdots\supset\bar{x}_m$ es una cadena de cerrados irreducibles de longitud máxima de $\operatorname{Proj} R$ y $x_m\in U_{\xi_i}^h\subseteq \operatorname{Proj} R$, entonces $\bar{x}_1\cap U_{\xi_i}^h\supset\cdots\supset\bar{x}_m\cap U_{\xi_i}^h$ es una cadena de cerrados irreducibles en $U_{\xi_i}^h$. Como la dimensión de un abierto es siempre menor o igual que la del espacio, tenemos que

$$\dim \operatorname{Proj} R=\dim U_{\xi_i}^h=\dim k[\frac{\xi_0}{\xi_i},\ldots,\frac{\xi_n}{\xi_i}]$$

2. Definición: Llamaremos variedad proyectiva (sobre k) al espectro proyectivo de un álgebra graduada del tipo $k[\xi_0,\ldots,\xi_n]=k[x_0,\ldots,x_n]/I$, siendo I un ideal homogéneo. Es decir, una variedad proyectiva es un cerrado del espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$. Si además es de dimensión 1, diremos que es una curva proyectiva.

3. Proposición: *Las variedades proyectivas son catenarias.*

Demostración. Dados dos cerrados irreducibles $\bar{x}_1\supset\bar{x}_2$, sea $U=U_{\xi_i}^h$ un abierto afín que contenga a x_2. Toda cadena maximal de cerrados irreducibles de extremos $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ induce, cortando con U, una cadena maximal en U (de extremos dados). Se concluye por 2.6.16, pues U es una variedad algebraica afín. □

4.4. Multiplicidad y multiplicidad de intersección

1. Definición: Si A es una k-álgebra finita. Diremos que $\dim_k A$ es el número de puntos de $\operatorname{Spec} A$ ("contando multiplicidades").

Si $C = \operatorname{Spec} k[x_1,\dots,x_n]/I$ y $C' = \operatorname{Spec} k[x_1,\dots,x_n]/I'$ son dos curvas afines sin componentes comunes, entonces $C \cap C' = \operatorname{Spec} k[x_1,\dots,x_n]/(I+I')$ está formado por un número finito de puntos cerrados $x_1,\dots,x_n$. Diremos que el número de puntos de la intersección de C con C', que denotaremos $\mu(C\cap C')$, es $\dim_k k[x_1,\dots,x_n]/(I+I')$.

2. Ejercicio: Calcular el número de puntos de corte de la recta $x=0$, con la curva $y^3+xy+x^3+1=0$.

3. Lema: *Sea A una k-álgebra de tipo finito de dimensión 1. Sean $f, g \in A$ no divisores de cero. Se cumple que*

$$\dim_k A/(fg) = \dim_k A/(f) + \dim_k A/(g)$$

Demostración. La sucesión

$$0 \to A/(f) \xrightarrow{g\cdot} A/(fg) \xrightarrow{\pi} A/(g) \to 0$$

con $(g\cdot)(\bar a) = \overline{ga}$ y $\pi(\bar a) = \bar a$, es exacta. En efecto, veamos sólo la inyectividad de $g\cdot$: si $\overline{ga}=0$, entonces $ga = fgh$ para un $h \in A$, luego $a = fh$ y $\bar a = 0$. Ahora ya es fácil concluir. □

4. Proposición: *Sean $C \equiv p(x,y)=0$ y $C' \equiv q(x,y)\cdot q'(x,y)=0$ dos curvas planas afines sin componentes comunes. Escribamos $C_1 \equiv q(x,y)=0$ y $C_2 \equiv q'(x,y)=0$. Se cumple que el número de puntos de intersección de C con C', es la suma del número de puntos de intersección de C con C_1 más el número de puntos de intersección de C con C_2.*

Demostración. Denotemos $A = k[x,y]/(p(x,y))$. Entonces el número de puntos de corte de C con C' es $\dim_k A/(q\cdot q')$, el número de puntos de corte de C con C_1 es $\dim_k A/(q)$ y el número de puntos de corte de C con C_1 es $\dim_k A/(q')$. Por el lema anterior se concluye. □

Por sencillez, vamos a suponer que k es un cuerpo algebraicamente cerrado.
Escribamos $\operatorname{Spec} k[x_1,\dots,x_n]/(I+I') = \{x_1,\dots,x_n\}$. Por **??**

$$k[x_1,\dots,x_n]/(I+I') = (k[x_1,\dots,x_n]/(I+I'))_{x_1} \times \cdots \times (k[x_1,\dots,x_n]/(I+I'))_{x_n}$$

Diremos que $\dim_k (k[x_1,\dots,x_n]/(I+I'))_x \underset{Not}{=} \mu_x(C\cap C')$ es la multiplicidad de intersección de C con C' en $x \in C\cap C'$.

5. Ejercicio: Calcular la multiplicidad de intersección en el origen de la curva $y^2 = x^2 + y^3$ con la curva $y^3 + x^2 = 0$.

6. Proposición: *El número de puntos de corte de dos curvas, sin componentes comunes, es igual a la suma de las multiplicidades de intersección en cada uno de los puntos de corte de las dos curvas, es decir,*

$$\mu(C\cap C') = \sum_{x\in C\cap C'} \mu_x(C\cap C')$$

Dada la curva plana afín $p(x,y)=0$, escribamos $p(x,y) = p_r(x,y) + p_{r+1}(x,y) + \cdots + p_n(x,y)$ como suma de polinomios homogéneos. Tenemos que

$$p_r(x,y) = x^r \cdot p_r(1, \frac{y}{x}) = x^r \cdot \prod_{i=1}^r (a_i \frac{y}{x} + b_i) = \prod_{i=1}^r (a_i y + b_i x)$$

Es decir, $p_r(x,y)$ es el producto de r rectas. Diremos que estas rectas son las tangentes de $p(x,y)=0$ en el origen y que la multiplicidad de $C\equiv p(x,y)=0$ en el origen es r, número que denotaremos por $\mu_{(0,0)}(C)$. Por traslaciones estas definiciones se pueden trasladar a todo punto p de $p(x,y)=0$. Si $\mu_p(C)=1$ diremos que p es no singular. Si $\mu_p(C)>1$ diremos que p es singular.

Si dos curvas planas son no singulares en un punto, no es difícil demostrar que la multiplicidad de intersección es uno si no son tangentes en el punto y mayor que uno si lo son. En el caso de que sean singulares, el cálculo de la multiplicidad de intersección es más difícil.

4.5. Teorema de Bézout

Sean $C\equiv p_n(x_0,x_1,x_2)=0$ y $C'\equiv p_m(x_0,x_1,x_2)=0$ dos curvas proyectivas planas, sin componentes comunes y $C\cap C'$ la intersección de las dos curvas planas.

Si $U^h_{x_0}$ es un abierto afín que contiene a $C\cap C'$, sean $x=\frac{x_1}{x_0}$ y $y=\frac{x_2}{x_0}$ coordenadas afines y escribamos $\frac{p_n(x_0,x_1,x_2)}{x_0^n}=p_n(1,x,y)=p(x,y)$ y $\frac{p_m(x_0,x_1,x_2)}{x_0^m}=p_m(1,x,y)=q(x,y)$. Entonces

$$C\cap C'=C\cap C'\cap U^h_{x_0}=\operatorname{Spec}k[x,y]/(p(x,y),q(x,y))$$

Diremos que el anillo $k[x,y]/(p(x,y),q(x,y))$ es el anillo de funciones de $C\cap C'$, también diremos que $\dim_k k[x,y]/(p(x,y),q(x,y))$ es el número de puntos en los que se cortan C y C'.

El anillo de funciones de $C\cap C'$ no depende del abierto afín $U^h_{x_0}$ (que contiene a $C\cap C'$) tomado: sea $U^h_{x_1}$ otro abierto afín que contiene a $C\cap C'$ y escribamos $x'=\frac{1}{x}=\frac{x_1}{x_0}$ y $y'=\frac{y}{x}=\frac{x_2}{x_0}$ y $p'(x',y')=\frac{p_n(x_0,x_1,x_2)}{x_1^n}=\frac{p(x,y)}{x^n}$ y $q'(x',y')=\frac{p_m(x_0,x_1,x_2)}{x_1^m}=\frac{q(x,y)}{x^m}$. Se cumple que $x=\frac{x_1}{x_0}$ es una función que no se anula en ningún punto de $C\cap C'\cap U^h_{x_0}$, e igualmente $x'=\frac{x_0}{x_1}$ es una función que no se anula en ningún punto de $C\cap C'\cap U^h_{x_1}$, luego

$$\begin{aligned}k[x,y]/(p(x,y),q(x,y))&=(k[x,y]/(p(x,y),q(x,y)))_x=(k[x',y']/(p'(x',y'),q'(x',y')))_{x'}\\&=k[x',y']/(p'(x',y'),q'(x',y'))\end{aligned}$$

1. Teorema de Bézout: *El número de puntos de intersección de dos curvas proyectivas planas $C\equiv p_n(x_0,x_1,x_2)=0$, $C'\equiv q_m(x_0,x_1,x_2)=0$ de grados n y m, sin componentes comunes, es $n\cdot m$.*

Demostración. La idea de la demostración es la siguiente: Supongamos que la recta del infinito $(x_0)^h_0$ no pasa por $C\cap C'$. Afínmente nuestras curvas se escribirán $p_n(1,x_1,x_2)=0$, $q_m(1,x_1,x_2)=0$ y la intersección es $C\cap C'=\operatorname{Spec}k[x_1,x_2]/(p_n(1,x_1,x_2),q_m(1,x_1,x_2))$ (nos conviene usar esta notación porque nos permite pensar afínmente las curvas C y C' como curvas en el plano $x_0=1$). El "cono", en $\mathbb{A}_3=\operatorname{Spec}k[x_0,x_1,x_2]$, que pasa por $C\cap C'$ y vértice $(0,0,0)$, es $\operatorname{Spec}k[x_0,x_1,x_2]/(p_n(x_0,x_1,x_2),q_m(x_0,x_1,x_2))$. Probaremos que los planos $x_0=\lambda$ cortan al cono en el mismo número de puntos. La intersección del cono con el plano $x_0=1$ es justamente $C\cap C'$. La intersección del cono con el plano $x_0=0$ es la intersección de $p_n(x_0,x_1,x_2)=0, x_0=0$, que son n rectas que pasan por el origen, con $q_m(x_0,x_1,x_2)=0, x_0=0$ que son m rectas que pasan por el origen. En conclusión, reducimos el problema del corte de dos curvas de grados n y m al problema del corte de n rectas con m rectas.

Por cambio de coordenadas homogéneo podemos suponer que $(x_0)^h_0\cap C\cap C'=\emptyset$. Tenemos que demostrar que

$$\dim_k k[x_1,x_2]/(p_n(1,x_1,x_2),q_m(1,x_1,x_2))=n\cdot m$$

Sea $B=k[x_0,x_1,x_2]/(p_n(x_0,x_1,x_2),q_m(x_0,x_1,x_2))$.

Se verifica que B es un $k[x_0]$-módulo sin torsión: Si $p(x_0)\cdot b=0$, escribamos $p(x_0)=\sum\limits_{i=0}^{s} a_i x_0^i$ y $b=\sum\limits_{i=0}^{r} b_i(x_0,x_1,x_2)$ (siendo los $b_i(x_0,x_1,x_2)$ polinomios homogéneos de grado i). Entonces, $x_0^s\cdot b_r(x_0,x_1,x_2)=0$. Es decir, x_0 sería divisor de cero en B. Si $a\cdot x_0=0$ en B, entonces $a\cdot x_0=bp_n+cq_m$. Entonces, $0=b(0,x_1,x_2)p_n(0,x_1,x_2)+c(0,x_1,x_2)q_m(0,x_1,x_2)$. Como $p_n(0,x_1,x_2)$ y $q_m(0,x_1,x_2)$ son primos entre si, $c(0,x_1,x_2)\in(p_n(0,x_1,x_2))$. Es decir, $c\in(x_0,p_n)$, digamos $c=c_1x_0+c_2p_n$. Luego $(a-c_1q_m)x_0=(b+c_2)p_n$. Como x_0 y p_n son primos entre si, $a-c_1q_m\in(p_n)$. Luego $a\in(p_n,q_m)$ y x_0 no es divisor de cero en B.

El morfismo $B\hookrightarrow B_{x_0}$ es inyectivo. Denotemos $A=[B_{x_0}]_0$. Sabemos que $B_{x_0}=\underset{n\in\mathbb{Z}}{\oplus} A\cdot x_0^n$. Denotemos $B_{x_0}^+=\underset{n\in\mathbb{N}}{\oplus} A\cdot x_0^n$. Obviamente, $B_{x_0}^+$ es un $k[x_0]$-módulo finito y como B se inyecta en $B_{x_0}^+$ es también un $k[x_0]$-módulo finito. En conclusión, B es un $k[x_0]$-módulo finito sin torsión, luego libre. Escribamos $B=k[x_0]\oplus\overset{s}{\cdots}\oplus k[x_0]$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\dim_k B/(x_0)&=\dim_k B\otimes_{k[x_0]}k[x_0]/(x_0)=s=\dim_k B\otimes_{k[x_0]}k[x_0]/(x_0-1)\\&=\dim_k B/(x_0-1)=\dim_k k[x_1,x_2]/(p_n(1,x_1,x_2),q_m(1,x_1,x_2))\end{aligned}$$

Así pues, tenemos que demostrar que $\dim_k B/(x_0)=n\cdot m$.

$$\begin{aligned}\dim_k B/(x_0)&=\dim_k k[x_1,x_2]/(p_n(0,x_1,x_2),q_m(0,x_1,x_2))\\&=\sum_{i,j}^{n,m}\dim_k k[x_1,x_2]/(a_ix_1+a_i'x_2,b_jx_1+b_j'x_2)=\sum_{i,j}^{n,m}1=n\cdot m\end{aligned}$$

□

En la teoría, un concepto pugna por emerger. Dado un espacio topológico, podemos hablar para cada abierto del espacio de las funciones continuas en el abierto. Dada una variedad algebraica afín $X=\operatorname{Spec}A$, hemos visto que $U_a=\operatorname{Spec}A_a$ y hemos dicho que A_a es el anillo de funciones algebraicas sobre U_a. Parece que podríamos decir que en las variedades algebraicas, como en los espacios topológicos, podemos hablar de las funciones algebraicas en cada abierto de la variedad. Es decir, cuando escribimos $X=\operatorname{Spec}A$, en realidad tenemos en mente la pareja $(\operatorname{Spec}A,A)$, y para cada abierto U_a, la pareja (U_a,A_a). Dada un variedad proyectiva, $X=\operatorname{Proj}k[\xi_1,\dots,\xi_n]$, hemos visto que $U_{\xi_i}^h=\operatorname{Spec}k[\frac{\xi_1}{\xi_i},\dots,\frac{\xi_n}{\xi_i}]$ y podríamos decir que $k[\frac{\xi_1}{\xi_i},\dots,\frac{\xi_n}{\xi_i}]$ es el anillo de funciones algebraicas sobre $U_{\xi_i}^h$. De nuevo, parece que podríamos decir, para cada abierto de X, cuáles son las funciones algebraicas en el abierto. Este va a ser el hecho nuclear en la definición de variedad algebraica (afín o no) que debemos explicitar con detalle y rigor. Para ello, se necesitan los conceptos de haces y espacios anillados, que se estudiarán en cursos posteriores.

4.6. Problemas

1. Probar que el morfismo $k[x]\hookrightarrow k[x,y]/(p(x,y))$ es finito si y sólo si la curva $p(x,y)=0$ no tiene asíntotas verticales.

2. Calcular las asíntotas imaginarias de la circunferencia $x^2+y^2=1$.

3. Probar que el conjunto de rectas que pasan por un punto ("haz de rectas") del plano afín se corresponde con el conjunto de puntos racionales de una recta proyectiva.

4. Probar que el conjunto de cónicas que pasan por cuatro puntos no alineados del plano afín se corresponden con los puntos racionales de una recta proyectiva.

5. Probar que el conjunto de cónicas que pasan tres puntos no alineados del plano afín y es tangente en uno de ellos a una recta fijada que pasa por el punto se corresponden con los puntos racionales de una recta proyectiva.

6. Probar que el conjunto de curvas de grado n de $\mathbb{P}^2$ se corresponden con los puntos racionales de un espacio proyectivo.

7. Probar que el conjunto de curvas afines de grado menor o igual que n de $\mathbb{A}^2$ se corresponden con los puntos racionales de un abierto de un espacio proyectivo.

8. Se dice que en general los puntos de una variedad algebraica irreducible cumplen una propiedad si existe un abierto de la variedad cuyos puntos cumplen la propiedad. Probar que en general las curvas planas afines de grado n son irreducibles.

9. Demostrar que en general las matrices cuadradas son invertibles. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n, probar que $c_{A\cdot B}(x) = c_{B\cdot A}(x)$.

10. Demostrar que $R_0[\frac{\xi_0}{\xi_i}, \dots, \frac{\xi_n}{\xi_i}] \simeq R_0[\xi_0, \dots, \xi_n]/(\xi_i - 1)$ y que por tanto, $U^h_{\xi_i} \simeq (\xi_i - 1)_0$. Probar que $U^h_{\xi_i} \times (\mathbb{A}^1 - \{0\}) = U_{\xi_i}$. Dar una interpretación geométrica de estos resultados.

11. Demostrar que el conjunto de puntos cerrados de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \operatorname{Proj}\mathbb{C}[x_0, \dots, x_{n+1}]$ es biyectivo con el conjunto $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}/\sim$, donde $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \sim (\alpha'_0, \dots, \alpha'_{n+1})$ si $(\alpha'_0, \dots, \alpha'_n) = \lambda(\alpha_0, \dots, \alpha_{n+1})$.

12. Sea

$$\begin{aligned} &p_1(x_0, \dots, x_n) = 0 \\ &\dots \\ &p_r(x_0, \dots, x_n) = 0 \end{aligned}$$

un sistema de ecuaciones homogéneas k-algebraicas y Σ el cierre algebraico de $k(y_1, \dots, y_n)$. En el conjunto X de todas las soluciones sobre Σ no nulas establezcamos la relación de equivalencia $\sim$: $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \sim (\mu_0, \dots, \mu_n)$ si existe $a \in \Sigma$ y $\tau \in \operatorname{Aut}_{k-alg}(\Sigma)$ tal que $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) = a \cdot (\tau(\mu_0), \dots, \tau(\mu_n))$. Probar que la aplicación

$$X/\sim \longrightarrow \operatorname{Proj} k[x_0, \dots, x_n]/(p_1, \dots, p_r)$$

que asigna a cada clase $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ el ideal de funciones que se anulan en $t \cdot (\lambda_0, \dots, \lambda_n)$, para todo t, es biyectiva.

13.
    a) Escribir las ecuaciones de la curva proyectiva plana $\operatorname{Proj}\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]/(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)$ en cada uno de los abiertos "afines", complementario del cerrado $(x_i)_0^h$ ("deshomogeneizar").

    b) Demostrar que el epimorfismo $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2] \to \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]/(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)$ define una inmersión cerrada $\operatorname{Proj}\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]/(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2) \hookrightarrow \mathbb{P}^2$

    c) Definir una curva proyectiva plana que en uno de los abiertos afines sea la curva plana "afín" $y + x^2 = 0$. ¿Corta la recta $x = 0$, a la curva $y + x^2 = 0$, en algún punto del "infinito"?

14. Demostrar que la recta tangente a una curva de $\mathbb{P}^2$ de ecuaciones homogéneas $p(x_0, x_1, x_2) = 0$ en un punto $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ no singular es

$$\frac{\partial p(x_0, x_1, x_2)}{\partial x_0}(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)X_0 + \frac{\partial p(x_0, x_1, x_2)}{\partial x_1}(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_1)X_1 + \frac{\partial p(x_0, x_1, x_2)}{\partial x_2}(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)X_2 = 0$$

15. Probar que $\dim \operatorname{Proj} k[\xi_0, \ldots, \xi_n] = (\dim \operatorname{Spec} k[\xi_0, \ldots, \xi_n]) - 1$.

16. Si X e Y son dos subvariedades proyectivas de $\mathbb{P}^n$, y $\operatorname{codim} X + \operatorname{codim} Y \leq n$, probar que $X \cap Y \neq \emptyset$ y que se cumple que

$$\operatorname{codim} X + \operatorname{codim} Y \geq \operatorname{codim} X \cap Y$$

17. Sea $f \in k[\xi_0, \ldots, \xi_n]$ una función homogénea de grado mayor que cero y $X = \operatorname{Proj} k[\xi_0, \ldots, \xi_n]$. Demostrar que

$$\dim (f)_0^h \geq \dim X - 1$$

18. Parametrizar la curva $x^6 - x^2y^3 - y^5 = 0$. Calcular sus soluciones racionales.

19. Sea C la cúbica plana $y^2 = x^2 + x^3$. El haz de rectas $y = tx$ define un morfismo birracional $\mathbb{A}_1 \to C$, $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$. Calcular el área del “ojo del lazo” definido por la curva $y^2 = x^2 + x^3$.

20. Probar que si una cónica tiene un único punto singular entonces no es irreducible.

21. Probar que si una cúbica plana tiene exactamente dos puntos singulares no es irreducible.

22. Probar que si una cuártica plana tiene exactamente cuatro puntos singulares entonces no es irreducible.

23. Probar que $(0, 0), (2, 0), (0, 2)$ son puntos singulares de la cuártica plana $xy(x + y - 2) - (x^2 + y^2 - 2x - 2y)^2 = 0$ ¿Existen más puntos singulares? Parametrizar esta cuártica (mediante un haz de cónicas).

24. Justificar por qué las circunferencias $x^2 + y^2 - 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 2 = 0$ han de ser tangentes en algún punto del infinito, sin hacer el cálculo explícito de sus tangentes en los puntos del infinito.

Índice alfabético